Übungen zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 51: (F20T1A3)

a) Bestimmen Sie alle Lösungen der folgenden Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$x'' - x = e^t$$

b) Die Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind gegeben durch $\varphi_1(t) := 1$, $\varphi_2(t) := t$ und $\varphi_3(t) := t^2$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Über eine lineare inhomogene Differentialgleichung zweiter Ordnung ist bekannt, daß φ_1, φ_2 und φ_3 Lösungen sind. Geben Sie die Menge aller Lösungen dieser Differentialgleichung an. Die Differentialgleichung selbst brauchen Sie dabei nicht zu bestimmen.

Aufgabe 52: (H19T3A4)

a) Bestimmen Sie alle Lösungen $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der homogenen reellen Differentialgleichung

$$y'' + 2y' + 2y = 0$$

b) Bestimmen Sie alle Lösungen $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der inhomogenen reellen Differentialgleichung

$$y''(x) + 2y'(x) + 2y(x) = 15e^x, \quad x \in \mathbb{R}$$

c) Zeigen Sie, daß es genau eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gibt mit

$$f''(z) + 2f'(z) + 2f(z) = 15e^z$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ sowie $f(0) = 3$, $f'(0) = 2$ und bestimmen Sie diese.

Aufgabe 53: (H14T2A4) Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$y'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} y(t)$$

a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für dieses Differentialgleichungssytem.

b) Bestimmen Sie die Lösung dieses Differentialgleichungssystems mit dem Anfangswert $y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c) Ist die Nullösung für dieses Differentialgleichungssystem stabil?

Aufgabe 54: (H13T3A2) Gegeben sei das lineare Differentialgleichungssystem $\dot{x} = A_a x$ mit der reellen $3 \times 3-$Matrix

$$A_a = \begin{pmatrix} -1 & a & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$$

wobei $a \in \mathbb{R}$ ein Parameter ist. Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$, für die es eine nichttriviale Lösung $x(t)$ gibt mit $\lim\limits_{t\to\infty} \|x(t)\| = 0$.

Aufgabe 55: (H04T1A1) Sei A eine reelle $n \times n-$Matrix mit nur einem ($n-$fachem) Eigenwert μ.

a) Begründen Sie, warum dann $(A - \mu E_n)^n = 0$ ist. (E_n ist $n \times n-$Einheitsmatix, 0 Nullmatrix)

b) Folgern Sie aus (a), daß man die Exponentialmatrix e^{tA} für jedes $t \in \mathbb{R}$ als Produkt von $e^{\mu t}$ mit einer endlichen Summe von Matrizen ausdrücken kann.

c) Wenden Sie (b) an, um die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zu ermitteln.

Aufgabe 56: (F16T2A3) Berechnen Sie, für welche Anfangswerte $x_0 \in \mathbb{R}^3$ die Lösung des Anfangswertproblems

$$\frac{dx}{dt} = Ax, x(0) = x_0 \quad \text{mit der Systemmatrix } A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

für $t \to \infty$ gegen die Ruhelage $r := \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ konvergiert.

Hinweis: Sie müssen nicht die allgemeine Lösung der Differentialgleichung bestimmen, um die Aufgabe zu lösen.