Übungen zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 1: (H14T3A2)
Auf $\mathbb{R}^2$ sei die reellwertige Funktion $(x, y) \mapsto u(x, y) = (x - y)(x + y + 1)$ gegeben.

a) Zeigen Sie, daß $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ harmonisch ist.

b) Bestimmen Sie alle Funktionen $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, so daß $f = u + iv$ holomorph ist und geben Sie f als Funktion von $z = x + iy \in \mathbb{C}$ an.

Aufgabe 2: (H11T2A2) Beantworten Sie die folgenden zwei Fragen zur Funktionentheorie jeweils mit einer kurzen Begründung.

a) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f^{(n)}(0) = n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Welchen Wert besitzt das Kurvenintegral $\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-1|=R} \frac{f(z)}{z-1} dz$ für $R > 0$, wobei $|z - 1| = R$ den positiv durchlaufenen Kreis um 1 mit Radius R bezeichnet?

b) Gibt es eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(\frac{1}{n}) = \frac{n}{2n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$?

Aufgabe 3: (F16T2A5)
Gegeben sei die Potenzreihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$. Zeigen Sie:

a) Der Konvergenzradius von f ist 1.

b) Für $k \in \mathbb{N}_0$ und $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ gilt $|f(z^{2^k})| \leq |f(z)| + k$.

c) Sei $k \in \mathbb{N}_0$ und ρ eine 2^k-te Einheitswurzel. Dann gilt $\lim\limits_{t \to 1, 0<t<1} |f(t\rho)| = \infty$.

d) Für keinen Punkt z des Randes seines Konvergenzgebietes ist f auf eine offene Umgebung von z holomorph fortsetzbar.

Aufgabe 4: (H15T1A2)

a) Existiert eine Folge von Punkten in der offenen oberen komplexen Halbebene, die alle Punkte von $\mathbb{R}$ und keine anderen Häufungswerte hat? Geben Sie eine ausführlich begründete Antwort.

b) Zeigen Sie, daß es eine Folge von Punkten in der offenen komplexen Einheitskreisscheibe gibt, die genau die Punkte der komplexen Einheitskreislinie als Häufungswerte hat, und weisen Sie nach, daß diese Eigenschaften tatsächlich erfüllt sind.

Aufgabe 5: (H14T1A1)
Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein nichtleeres Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ und $g : G \to \mathbb{C}$ seien holomorph mit $f' = gf$. Zeigen Sie: Hat f eine Nullstelle in G, so ist $f(z) = 0$ für alle $z \in G$.