

Übungsblatt 9 zu Funktionentheorie, Lebesguetheorie und gewöhnliche Differentialgleichungen (Lehramt Gymnasium)

Aufgabe 27: (10 Punkte)

Es sei $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch und es gelte $f(\frac{1}{n}) = (-1)^n \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

- a) Zeige: Es gibt eine Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = e$.
- b) Gib ein konkretes Beispiel für ein derartiges f an

Aufgabe 28: (10 Punkte)

- a) Bestimme für alle isolierten Singularitäten von $\frac{1}{1 - e^z}$ und $\frac{z^2 - 1}{1 - e^z}$ deren Typ und die Residuen.
- b) Zu $a > 0$ sei γ_a der Streckenzug, der von $-8i + 2$ über $8i - a$, $8i + a$, $-8i - 2$ zurück nach $-8i + 2$ geht. Bestimme für welche $a > 0$ die Kurvenintegrale $\int_{\gamma_a} \frac{1}{1 - e^z} dz$ und $\int_{\gamma_a} \frac{z^2 - 1}{1 - e^z} dz$ existieren und bestimme in diesem Fall deren Wert.

Aufgabe 29: (10 Punkte)

Es sei $f : \mathbb{C} \setminus \{1, -1, 0\} \rightarrow \mathbb{C}$.

$$z \mapsto \frac{(z+1)^2}{(z^2-1)^2} + e^{-\frac{1}{z^4}}$$

- a) Zeige, daß die Grenzwerte $\lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z \in]0, \infty[}} e^{-\frac{1}{z^4}}$, $\lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z \in]-\infty, 0[}} e^{-\frac{1}{z^4}}$, $\lim_{\substack{z = iy \rightarrow 0 \\ y \in]0, \infty[}} e^{-\frac{1}{z^4}}$ in $\mathbb{C}$ existieren, aber kein Grenzwert $\lim_{\substack{z = (1+i)y \rightarrow 0 \\ y \in]0, \infty[}} e^{-\frac{1}{z^4}}$ in $\mathbb{C}$ existiert.
- b) Bestimme für jede der isolierten Singularitäten von f den Typ und gib den Hauptteil der Laurentreihenentwicklung in einer punktierten Umgebung für jede der isolierten Singularitäten an.
- c) Zeige, daß f eine Stammfunktion auf $\mathbb{C} \setminus \{1, -1, 0\}$ besitzt.