Übungsblatt 8 zu Funktionentheorie, Lebesguetheorie und gewöhnliche Differentialgleichungen (Lehramt Gymnasium)

Aufgabe 23: (10 Punkte)
Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analytisch und $\begin{array}{rcl} \mathrm{Re}\,(f) - \mathrm{Im}\,(f) : \mathbb{C} & \to & \mathbb{R} \\ z & \mapsto & \mathrm{Re}\,(f(z)) - \mathrm{Im}\,(f(z)) \end{array}$ sei nach unten beschränkt. Zeige, daß f konstant ist.

Aufgabe 24: (10 Punkte)
Bestimme die Laurentreihenentwicklung von $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{C}\backslash\{i,-i\} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \frac{1}{z^2+1} \end{array}$

a) um 0 auf $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$

b) um 0 auf $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$

c) um i auf $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - i| < 2\}$

d) um i auf $\{z \in \mathbb{C} : |z - i| > 2\}$

Aufgabe 25: (15 Punkte)
Bestimme für $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{C}\backslash\{i,2,-1\} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \dfrac{1}{(z-i)^2(z-2)(z+1)} \end{array}$ den Hauptteil der Laurentreihenentwicklung um i und -1 und für $\begin{array}{rcl} g : \mathbb{C}\backslash\{0,1,-1\} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & e^{\frac{1}{z}} \frac{1}{z^2-1} \end{array}$ den Hauptteil der Laurentreihenentwicklung um 0. Bestimme für diese isolierten Singularitäten den Typ der Singularität und das Residuum

Aufgabe 26: (10 Punkte)
Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ analytisch und $a \in U$ mit $f(a) = 0$. Zeige, daß es ein $r > 0$ gibt, so daß

$$\begin{array}{rcl} g : \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < r\} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} f((z-a)^k + a) \end{array}$$

eine wohldefinierte analytische Funktion ist.