Übungsblatt 7 zu Funktionentheorie, Lebesguetheorie und gewöhnliche Differentialgleichungen (Lehramt Gymnasium)

Aufgabe 20: (15 Punkte)

Es sei

$$\begin{aligned} \gamma_1 : [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{C} \\ t &\mapsto t - \sin(t) + i(1 - \cos(t)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_2 : [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{C} \\ t &\mapsto t - \sin(t) - i(1 - \cos(t)) \end{aligned}$$

und $\gamma := \gamma_1 + (-\gamma_2)$ der aus γ_1 und γ_2 gestückelte Weg.

- a) Skizziere die Spur des Weges γ .
- b) Zeige, daß durch $f^{(n)}(0) = 3^n$ für $n \in \mathbb{N}_0$ eine analytische Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definiert wird.
- c) Berechne

$$\int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - 1)^3} d\xi$$

- d) Berechne

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z + 2)^3} dz.$$

Aufgabe 21: (10 Punkte)

- a) Zeige, daß $f : \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| < 3\} \rightarrow \mathbb{C}$ eine analytische Funktion definiert.

$$z \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} 3^{-k}(z - 1)^k$$

- b) Bestimme die größte offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{C}$, auf der $\frac{f(z)}{(z - 2)(z^2 - 2z + 2)}$ eine analytische Funktion $g : U \rightarrow \mathbb{C}$ definiert.

$$z \mapsto \frac{f(z)}{(z - 2)(z^2 - 2z + 2)}$$

- c) Es sei $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$. Zeige, daß das Kurvenintegral $\int_{\gamma} g(z) dz \in \mathbb{C}$ existiert

$$t \mapsto 1 + i + e^{it}$$
 und berechne $\int_{\gamma} g(z) dz$.

Aufgabe 22: (15 Punkte)

Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z_1, \dots, z_n \in U$ und $F : U \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und

$$\begin{aligned} f := F|_{U \setminus \{z_1, \dots, z_n\}} : U \setminus \{z_1, \dots, z_n\} &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto F(z) \end{aligned}$$

sei analytisch. Zeige, daß F analytisch ist.