

Übungsblatt 5 zu Funktionentheorie, Lebesguetheorie und gewöhnliche Differentialgleichungen (Lehramt Gymnasium)

Aufgabe 13: (10 Punkte)

Es sei $\mathbb{E} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Bestimme alle analytischen Funktionen $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f'(z) = 2z(f(z))^2$ für alle $z \in \mathbb{E}$ und $f(0) = 1$.

Aufgabe 14: (15 Punkte) Entscheide und begründe, welche der folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:

- a) $f : \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \neq 0\} \rightarrow \mathbb{C}$ ist die einzige analytische Funktion auf $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \neq 0\}$ mit $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n^2}{1 - ni}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- $$z \mapsto \frac{1}{z(z-i)}$$
- b) $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ ist die einzige analytische Funktion auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $f\left(\frac{1}{n}\right) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- $$z \mapsto \sin\left(\frac{\pi}{z}\right)$$
- c) $f : \mathbb{C} \setminus \{-1, 3\} \rightarrow \mathbb{C}$ ist die einzige analytische Funktion auf $\mathbb{C} \setminus \{-1, 3\}$ mit $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n^2}{1 - 2n - 3n^2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- $$z \mapsto \frac{1}{(z+1)(z-3)}$$
- d) Jede analytische Funktion $f : \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(z) = f(z^3)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ ist konstant.

Aufgabe 15: (10 Punkte)

- a) Es sei $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in \mathbb{C} aus paarweise verschiedenen Folgengliedern und $(z_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge mit $\xi = \lim_{k \rightarrow \infty} z_{n_k}$. Zeige, daß ξ dann ein Häufungspunkt der Menge $\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ der Folgenglieder von $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist.
- b) Zeige daß die konstante Funktion $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ die einzige analytische Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f\left(e^{\sqrt{10}\pi i n}\right) = \pi$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist.
- $$z \mapsto \pi$$

Aufgabe 16: (10 Punkte)

Es sei $\gamma : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Berechne das Kurvenintegral $\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2}$.

$$t \mapsto \cos(t) + 2i \sin(t)$$