Übungsblatt 4 zu Funktionentheorie, Lebesguetheorie und gewöhnliche Differentialgleichungen (Lehramt Gymnasium)

Aufgabe 10: (10 Punkte)

Für $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sei $f_a : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Untersuche das Stabilitätsverhalten der

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -y + x^2 \\ \sinh(ax) - 2xy \end{pmatrix}$$

Ruhelösung $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 11: (15 Punkte) Es sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^2y + y \\ -xy^2 - x \end{pmatrix}$$

- a) Bestimme alle Ruhelösungen von $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
- b) Bestimme eine Erhaltungsgröße H zu $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
- c) Zeige, daß die Niveaulinien von H beschränkt sind.
- d) Zeige, daß die maximalen Lösungen jedes Anfangswertproblems

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \xi$$

für $\xi \in \mathbb{R}^2$ auf $\mathbb{R}$ definiert sind.

- e) Zeige, daß $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ eine stabile Ruhelösung von $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ist.
- f) Zeige, daß $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ keine attraktive Ruhelösung von $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ist.

Aufgabe 12: (10 Punkte) Untersuche für jeden Parameterwert $a \in \mathbb{R}$ die Stabilitätseigenschaften der Ruhelage $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= ax_1 + x_2 + (a+1)x_1^2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 + ax_2 \end{aligned}$$