Übungsblatt 3 zu Funktionentheorie, Lebesguetheorie und gewöhnliche Differentialgleichungen (Lehramt Gymnasium)

Aufgabe 7: (10 Punkte)
Es sei $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Erstelle ein Phasenportrait von $X' = AX$ in folgenden Schritten:

a) Berechne die Eigenwerte und Eigenvektoren und A und erstelle damit ein ganz grobes Bild des Phasenportraits, in dem alle Ruhelagen und alle Trajektoren, die Halbgeraden sind verzeichnet sind.

b) Bestimme eine Jordanform J zu A einschließlich einer Transformationsmatrix T mit $J = T^{-1}AT$

c) Bestimme aus dem Fluß $\varphi(t, \xi) = e^{tJ}\xi$ von $X' = JX$ ein Phasenportrait von $X' = JX$.

d) Welche Beziehung besteht zwischen dem Phasenportrait von $X' = AX$ und dem Phasenportrait von $X' = JX$?

Aufgabe 8: (15 Punkte)
Es sei
$$\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 4(2-y)(x^2 + (2-y)^2) \\ 4x(x^2 + (2-y)^2) \end{pmatrix} \end{array}.$$

a) Zeige, daß
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x(\tau) \\ y(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$
für jedes $\tau, \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$ eine eindeutige maximale Lösung besitzt.

b) Bestimme alle Ruhelagen von $\binom{x'}{y'} = g\binom{x}{y}$.

c) Bestimme eine Erhaltungsgröße $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zu $\binom{x'}{y'} = g\binom{x}{y}$.

d) Skizziere das Phasenportrait von $\binom{x'}{y'} = g\binom{x}{y}$

e) Zeige, daß zu $\tau, \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$ die maximale Lösung von
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x(\tau) \\ y(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$
auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist.

Aufgabe 9: (20 Punkte) Es sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Zeige, daß das Differentialgleichungssystem
$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= |x| \end{aligned} \tag{1}$$
für alle $\tau, x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ eine eindeutige auf $\mathbb{R}$ definierte maximale Lösung zur Anfangsbedingung $x(\tau) = x_0, y(\tau) = y_0$ besitzt.

b) Bestimme die Fundamentalmatrix e^{tA} zu $X' = AX$ und ein Phasenportrait von $X' = AX$.

c) Bestimme die Fundamentalmatrix e^{tB} zu $X' = BX$ und ein Phasenportrait von $X' = BX$.

d) Wie erhält man mit den Resultaten aus (b) und (c) Lösungen und ein Phasenportrait von (1).

e) Bestimme alle Lösungen von (1), die für $t \to \infty$ oder $t \to -\infty$ gegen $(0, 0)$ konvergieren.