# Ferienblatt zu Funktionentheorie, Lebesguetheorie und gewöhnliche Differentialgleichungen (Lehramt Gymnasium)

**Aufgabe 37: (10 Punkte)** Für $a \in \mathbb{C}$ bezeichne $\gamma_a : \begin{array}{rcl} [0, 2\pi] & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & a + 2e^{it} \end{array}$. Bestimme den Wert des komplexen Wegintegrals

$$\int_{\gamma_a} \frac{1 - 2z^2}{z^3} dz$$

für alle $a \in \mathbb{C}$ mit $|a| \neq 2$.

**Aufgabe 38: (15 Punkte)**

a) Finde die Laurentreihenentwicklung der Funktion $f(z) = \dfrac{1}{(z+2)^3(z^2+1)}$ um $z_0 = -2$. Bestimme den Konvergenzbereich der gefundenen Laurentreihe.

b) Es sei $\gamma : \begin{array}{rcl} [0, 2\pi] & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & 1 + 2e^{it} \end{array}$. Berechne das Integral $\displaystyle\int_{\gamma} f(z)dz$.

**Aufgabe 39: (15 Punkte)**
Bestimme für die folgenden Funktionen $f$ im Punkt $a$ die Art der Singularität von $f$ in $a$. Gib bei hebbaren Singularitäten den Grenzwert von $f$, bei Polen den Hauptteil und bei wesentlichen Singularitäten das Residuum an.

a) $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{C}\backslash\{\pm i\} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \dfrac{z^3 - 5z + 6i}{z^2 + 1} \end{array}$ und $a = i$

b) $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{C}\backslash 2\pi i\mathbb{Z} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \dfrac{1}{e^z - 1} \end{array}$ und $a = 2\pi i$

c) $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{C}\backslash\{0\} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \cos(\frac{1}{z}) \end{array}$ und $a = 0$.

**Aufgabe 40: (15 Punkte)**

a) Finde eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C}\backslash\{-1, 1\} \to \mathbb{C}$, die in den Punkten $-1$ und $1$ wesentliche Singularitäten mit den Residuen

$$\mathrm{Res}(f, -1) = -1, \quad \mathrm{Res}(f, 1) = 1$$

besitzt. Ist $f$ durch diese Eigenschaften eindeutig bestimmt?

b) Sei $f$ die in (a) gefundene Funktion. Für $\alpha \in [0, \infty[$ sei $\gamma_\alpha$ der geschlossene Weg, der die Punkte

$$2 + \alpha i, -2 - i, -2 + i.2 - \alpha i, 2 + \alpha i$$

in der angegebenen Reihenfolge durch Geradenstücke verbindet. Für welche Werte von $\alpha$ ist das komplexe Wegintegral

$$\int_{\gamma_\alpha} f(z)dz$$

definiert? Berechne das Integral für diese Werte von $\alpha$.

**Aufgabe 41: (15 Punkte)**

a) Es sei $n \in \mathbb{N}$. Bestimme die Lage und die Ordnung der Pole der meromorphen Funktion $f(z) = \dfrac{1}{1+z^n}$.

b) Zeige, daß für $n \geq 2$ gilt:

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+z^n} dz = \frac{\frac{\pi}{n}}{\sin(\frac{\pi}{n})}$$

Hinweis: Betrachte das Wegintegral $\int_\gamma \frac{1}{1+z^n} dz$ für den geschlossenen Weg $\gamma$, der von 0 in gerader Linie nach $R$, von dort auf dem Kreissegment nach $Re^{\frac{2\pi i}{n}}$ und von hier aus in gerader Linie wieder zurück nach 0 verläuft.

**Aufgabe 42: (10 Punkte)**

a) Zeige, daß die Gleichung

$$z + e^{-z} = 2021$$

in der Halbebene $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0\}$ genau eine Lösung besitzt.

b) Zeige, daß diese Lösung reell ist.

**Aufgabe 43: (10 Punkte)** Gegeben sei die Funktion $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{C}\backslash\{0\} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \frac{z+1}{2z} \end{array}$.

a) Bestimme das Bild der Einheitskreislinie unter $f$.

b) Bestimme das Bild der punktierten offenen Kreisscheibe $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$ unter $f$.

**Aufgabe 44: (15 Punkte)** Entscheide bei welchem der drei Paare von offenen Teilmengen von $\mathbb{C}$ es eine biholomorphe Abbildung zwischen den beiden Mengen gibt:

a) $\mathbb{C}\backslash\{2\}$ und $\mathbb{E} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$

b) $\mathbb{C}\backslash] - \infty, 0]$ und $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0\}$

c) $\mathbb{S} := \{z \in \mathbb{C} : -1 < \operatorname{Im}(z) < 1\}$ und $\mathbb{C}$.

**Aufgabe 45: (10 Punkte)** Es sei $\Omega \neq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, es seien $a, b \in \Omega$ mit $a \neq b$ und es seien $f : \Omega \to \Omega$ und $g : \Omega \to \Omega$ biholomorphe Abbildungen mit $f(a) = g(a)$ und $f(b) = g(b)$. Zeige $f = g$.

**Abgabe bis zum 24.September 2021, 14 Uhr via Uni2work**