Übungsblatt 11 zu Funktionentheorie, Lebesguetheorie und gewöhnliche Differentialgleichungen (Lehramt Gymnasium)

Aufgabe 34: (15 Punkte)

a) Zeige, daß $\begin{aligned} f_a : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{(x+a)\sin(\pi x)}{x^2+a^2} \end{aligned}$ für kein $a > 0$ integrierbar ist.

b) Zeige, daß der Grenzwert

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{(x+a)\sin(\pi x)}{x^2+a^2} dx$$

existiert.

c) Benutze den Residuensatz, um

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{(x+a)\sin(\pi x)}{x^2+a^2} dx$$

zu berechnen. Gib insbesondere alle Integrationspfade explizit an und zeige die Konvergenz.

Aufgabe 35: (15 Punkte)

a) Es sei $n \in \mathbb{N}$. Berechne das Wegintegral

$$\int_{\Gamma} \frac{e^{2iz}}{\cosh(z)} dz,$$

wobei Γ der Weg ist, der das Rechteck

$$R = \{z \in \mathbb{C} : -n \leq \mathrm{Re}\,(z) \leq n, 0 \leq \mathrm{Im}\,(z) \leq n\pi\}$$

im Gegenuhrzeigersinn umschließt.

b) Berechne das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2iz}}{\cosh(z)} dz.$$

Aufgabe 36: (10 Punkte)

Es seien $p(z) = a_n z^n + ... + a_1 z + a_0$ und $q(z) = b_m z^m + ... + b_1 z + b_0$ zwei Polynome mit komplexen Koeffizienten und $m \geq n + 2$. Die rationale Funktion $f := \frac{p}{q}$ sei für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $q(z) \neq 0$ definiert. Zeige, daß die Summe der Residuen von f verschwindet, dh.

$$\sum_{s\in\mathbb{C}} \mathrm{Res}(f, s) = 0.$$