Übungssblatt 1 zu Funktionentheorie, Lebesguetheorie und gewöhnliche Differentialgleichungen (Lehramt Gymnasium)

Aufgabe 1: (15 Punkte)

Es sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Berechne die Fundamentalmatrix e^{tA} von $x' = Ax$.

b) Zeige, daß das Anfangswertproblem

$$x' = Ax + \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ -t \end{pmatrix}, \quad x(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eine maximale Lösung $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ hat und berechne diese.

Aufgabe 2: (15 Punkte)

Es sei $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Berechne die Fundamentalmatrix e^{tA} von $x' = Ax$.

b) Zeige, daß das Anfangswertproblem

$$x' = Ax + \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}, \quad x(-1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eine maximale Lösung $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ hat und berechne diese.

Aufgabe 3: (20 Punkte)

Es sei $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 & 3 & -1 \\ -3 & -4 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -4 & -4 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Berechne die Fundamentalmatrix e^{tA} von $x' = Ax$.

b) Zeige, daß das Anfangswertproblem

$$x' = Ax + t^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x(-1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eine maximale Lösung $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^5$ hat und berechne diese.