Übungsblatt 10 zu Funktionentheorie, Lebesguetheorie und gewöhnliche Differentialgleichungen (Lehramt Gymnasium)

Aufgabe 30: (10 Punkte)

a) Bestimme die Anzahl der Nullstellen – gezählt mit Vielfachheiten – von

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & e^{iz}+2(z^8+z^4+1) \end{array}$$

in der offenen oberen Halbebene $H=\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Im}(z)>0\}$.

b) Es sei $U:=\{z\in\mathbb{C}:|z|>2,\operatorname{Im}(z)>0\}$. Zeige, daß $f|_U$ einen holomorphen Logarithmus besitzt.

Aufgabe 31: (15 Punkte)

a) Zeige, daß $\begin{array}{rcl} f_1:\mathbb{C}\backslash\{iy:y\in[-1,1]\} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \dfrac{z+i}{z-i} \end{array}$ einen holomorphen Logarithmus besitzt.

b) Zeige, daß $\begin{array}{rcl} f_2:\mathbb{C}\backslash\{iy:|y|\geq 1\} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \dfrac{z+i}{z-i} \end{array}$ einen holomorphen Logarithmus besitzt.

c) Zeige, daß $\begin{array}{rcl} f_3:\mathbb{C}\backslash\{iy:|y|\geq 1\} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & e^{iz^3-z^2+1}\dfrac{z+i}{z-i} \end{array}$ für jedes $n\in\mathbb{N}$ eine holomorphe $n-$te Wurzel besitzt.

d) Zeige, daß $\begin{array}{rcl} f_4:\mathbb{C}\backslash\{iy:y\in[-1,1]\} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \dfrac{z+i}{z-i}(z-2)^3 \end{array}$ eine holomorphe dritte Wurzel, aber keine vierte Wurzel besitzt.

Aufgabe 32: (10 Punkte)

Zeige, daß das Integral $\displaystyle\int\limits_0^{\pi}\frac{1}{3+2\cos(t)}dt$ existiert und berechne es.

Aufgabe 33: (10 Punkte)

a) Zeige, daß $\begin{array}{rcl} [0,\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x}{1+x^3} \end{array}$ integrierbar ist.

b) Berechne $\displaystyle\int\limits_0^{\infty}\frac{x}{1+x^3}dx$ unter Verwendung eines geschlossenen Weges, der durch 0, R und $Re^{\frac{2\pi i}{3}}$ geht.