Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 22: (F08T2A4) Berechnen Sie die Integrale

a) $$\int_0^{2\pi} \frac{2+\cos(3\theta)}{2+\cos(\theta)} d\theta$$

b) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx$$

Aufgabe 23: (H18T2A3)

a) Die Zahl $a \in \mathbb{R}$ erfüllt $a > 1$. Zeigen Sie, daß die Gleichung

$$ze^{a-z} = 1$$

genau eine Lösung $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ besitzt und diese Lösung reell und Positiv ist.

b) Zeigen Sie, daß gilt:

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{3+2\cos(\theta)} d\theta = \frac{\pi}{\sqrt{5}}$$

Aufgabe 24: (F19T2A2) Es sei $\mathbb{E} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ und $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & 4z + z^2 + e^z \end{array}$.

a) Zeigen Sie, daß f in $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ genau eine einfache Nullstelle besitzt.

b) Zeigen Sie, daß es für $f|_{\mathbb{E}} : \mathbb{E} \to \mathbb{C}$ keinen holomorphen Logarithmuszweig – also kein holomorphes $l : \mathbb{E} \to \mathbb{C}$ mit $e^{l(z)} = f(z)$ für alle $z \in \mathbb{E}$ – gibt.

c) Zeigen Sie, daß es für $f|_{\mathbb{E}}$ keinen holomorphen Zweig der dritten Wurzel – also kein holomorphes $w : \mathbb{E} \to \mathbb{C}$ mit $(w(z))^3 = f(z)$ für alle $z \in \mathbb{E}$ – gibt.