Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 16: (F03T3A2)

a) Sei $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ holomorph mit $|f(z)| \leq 1 + \frac{1}{|z|^2}$ für alle $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Zeigen Sie, daß f dann die Form $f(z) = a + \frac{b}{z} + \frac{c}{z^2}$ für $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ mit geeigneten Konstanten $a, b, c \in \mathbb{C}$ hat.

b) Es seien $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ und $g : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ holomorph, wobei g in 0 einen Pol der Ordnung $k > 0$ habe. Es gelte $f(\frac{1}{n}) = g(\frac{1}{n})$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, daß dann $f = g$ ist oder f in 0 eine wesentliche Singularität hat.

Aufgabe 17: (F11T1A4) Gegeben sei die Funktion $\begin{array}{rcl} f : D & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \dfrac{1}{z^2 + 2z + 2} \end{array}$ mit maximaler Definitionsmenge $D \subseteq \mathbb{C}$.

a) Zeigen Sie, daß das Integral der Funktion f über die positiv orientierte Kreislinie um 0 mit Radius 3 verschwindet.

b) Zeigen Sie mit oder ohne Hilfe von (a), daß f auf $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 2\}$ eine komplexe Stammfunktion hat. (Diese braucht nicht unbedingt ausgerechnet zu werden.)

Aufgabe 18: (F04T3A1) Es sei $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ holomorph und erfülle

$$f(\frac{1}{n}) = (-1)^n \frac{1}{n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

a) Beweisen Sie, daß f in 0 weder eine hebbare Singularität noch eine Polstelle haben kann.

b) Geben Sie konkret eine in $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ holomorphe Funktion mit dieser Eigenschaft an.