Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 13: (F14T1A4)
Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ eine Funktion, die bei Annäherung an ∂G gegen ∞ strebt, dh. für jede Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in G mit $z_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} z \in \partial G$ gilt $|f(z_n)| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$. Zeigen Sie, daß f nicht holomorph ist, indem Sie die folgenden Fälle unterscheiden:

(i) f hat keine Nullstelle in G.

(ii) f hat endlich viele Nullstellen in G.

(iii) f hat unendlich viele Nullstellen in G.

Aufgabe 14: (F10T3A5) Für die Funktion $f(z) = \dfrac{2}{z(z^2+1)}$ bestimme man die Laurentreihen in den Bereichen

$$\begin{aligned} A_1 &:= \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < \frac{1}{2}\} \\ A_2 &:= \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-i| < 1\} \\ A_3 &:= \{z \in \mathbb{C} : 2 < |z-i| \ < 3\} \end{aligned}$$

und berechne längs $\begin{aligned} \alpha : [0, 2\pi] &\to \mathbb{C} \\ t &\mapsto \tfrac{1}{2}e^{it} \end{aligned}$ und $\begin{aligned} \beta : [0, 2\pi] &\to \mathbb{C} \\ t &\mapsto 4e^{4it} \end{aligned}$ die Wegintegrale $\int\limits_\alpha f(z)dz$ und $\int\limits_\beta f(z)dz$.

Aufgabe 15: (H11T2A3)

a) Sei h in einer Umgebung von $z_0 \in \mathbb{C}$ holomorph mit $h(z_0) \neq 0$ und sei eine meromorphe Funktion F durch $F(z) = \frac{h(z)}{(z-z_0)^3}$ gegeben. Berechnen Sie das Residuum von F in z_0.

b) Klassifizieren Sie für die Funktionen

$$f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^3} \quad \text{und} \quad g(z) = \exp(\exp(-\frac{1}{z}))$$

alle isolierten Singularitäten in $\mathbb{C}$.

c) Berechnen Sie mit der Funktion f aus (b) das Integral

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx.$$