Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 10: (H05T2A1) Beweisen Sie folgende Aussagen

a) Die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} z^n$$

hat den Konvergenzradius $\frac{1}{2}$.

b) Ist $\mathbb{E} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ die offene Einheitskreisscheibe und $D \subseteq \mathbb{C}$ eine diskrete und abgeschlossene Teilmenge, so ist jede holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \backslash D \to \mathbb{E}$ konstant.

c) Es sei $A = \{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < |z| < 2\}$. Die holomorphe Funktion $\begin{array}{rcl} f : A & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \frac{1}{z} \end{array}$ ist auf A nicht gleichmäßig durch Polynome in z approximierbar.

Aufgabe 11: (F19T1A2)

a) Es sei $(f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R})_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen. Formulieren Sie das Majorantenkriterium von Weierstraß für die gleichmäßige Konvergenz der Funktionenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ auf $\mathbb{R}$.
Von nun an sei $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion auf dem kompakten Intervall $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$.

b) Zeigen Sie, daß f dehnungsbeschränkt (global Lipschitz-stetig) ist, dh. daß es ein $L > 0$ gibt, so daß $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ für alle $x, y \in [0, 1]$ gilt.

c) Zeigen Sie, daß die Funktionenreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[f\left(\frac{1}{n^2 + x^2}\right) - f(0) \right]$$

gleichmäßig auf $\mathbb{R}$ konvergiert (bzgl. x). Begründen Sie, ob die Grenzfunktion stetig ist.

Aufgabe 12: (F03T3A1) Es sei $\mathbb{E} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ und $f : \mathbb{E} \to \mathbb{C}$ analytisch mit $f(0) = 0$. Zeige

a) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f(z^n)$ konvergiert lokal gleichmäßig absolut auf $\mathbb{E}$.

b) Ist f sogar auf einer offenen Umgebung U des Abschlußes $\overline{\mathbb{E}}$ analytisch und konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} f(z^n)$ absolut für alle $z \in \overline{\mathbb{E}}$, so ist f identisch 0.