Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 7: (H10T2A2)
Es sei $\mathbb{E} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ die offene Einheitskreisscheibe und $f : \mathbb{E} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion für die $|f(0)| < 1$ und $|f(z)| \leq 1$ für alle $z \in \mathbb{E}$ gilt. Man zeige, daß dann sogar $|f(z)| < 1$ für alle $z \in \mathbb{E}$ gelten muß.

Aufgabe 8: (F19T3A1)
Sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl.

a) Bestimmen Sie für die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = z^n - 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$ alle Nullstellen mit strikt positivem Realteil.

b) Sei $z \in \mathbb{C}$ eine der Nullstellen mit $\mathrm{Re}\,(z) > 0$ aus Teilaufgabe (a). Zeigen Sie, daß $w = z + z^{n-1}$ eine reelle Zahl echt größer Null ist.

c) Sei $n = 5$ und $w > 0$ eine der positiven reellen Zahlen aus Teilaufgabe (a). Nehmen Sie $w \neq 2$ an und zeigen Sie, daß

$$w^2 + w - 1 = 0$$

gilt. Bestimmen Sie den Winkel $\alpha \in]0, \pi[$ mit $w = 2\cos(\alpha)$.

Aufgabe 9: (H06T2A2) Drei Fragen zur Funktionentheorie:

a) Hat jede holomorphe Funktion eine Stammfunktion?

b) Wo konvergiert die Laurentreihe $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} z^n$?

c) Nimmt die komplexe Sinusfunktion jeden Wert an?