Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 4: (H10T3A1)
Sei f eine in einer Umgebung von $\overline{D_2} := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 2\}$ definierte holomorphe Funktion mit $|f(z)| \leq 1$ für alle $z \in \overline{D_2}$. Zeigen Sie: Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \leq 1$ gilt: $|f''(z)| \leq 4$.
Hinweis: Cauchy-Integralformel

Aufgabe 5: (F11T2A1)
Geben Sie jeweils alle holomorphen Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit den angegebenen Eigenschaften an und begründen Sie jeweils, daß es über die von Ihnen angegebenen Funktionen hinaus keine weiteren mit diesen Eigenschaften gibt.

a) $f'(z) = zf(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ und $f(0) = 1$.

b) $f(f(z)) = z$ für alle $z \in \mathbb{C}$, $f(0) = 0$ und $f'(0) = 1$.

Aufgabe 6: (F12T1A2)
Drei Fragen zur Funktionentheorie:

a) Gibt es eine holomorphe Funktion $f : \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\} \to \mathbb{C}$, so daß $f(\frac{1}{2}) = 2$ ist und $|f(z)| = 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ gilt?

b) Gibt es eine holomorphe Funktion $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, so daß für alle $x + iy \in \mathbb{C}$ gilt: $(\operatorname{Im} g)(x + iy) = x^2 - y^2$?

c) Gibt es eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{C}$ von 0 und eine holomorphe Funktion $h : U \to \mathbb{C}$, so daß für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $h^{(n)}(0) = (-1)^n(2n)!$