

## Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

### Aufgabe 40: (F20T2A1)

Gegeben seien zwei reelle Zahlenfolgen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Weiter sei  $b \in \mathbb{R}$ .

- a) Sei  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ . Zeigen Sie mit Hilfe der Definition für die Konvergenz einer reellen Zahlenfolge, daß die Folge  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  beschränkt ist.
- b) Es sei  $\left( \sum_{k=1}^n a_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$  absolut konvergent und  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ . Zeigen Sie, daß die Reihe  $\left( \sum_{k=1}^n a_k b_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$  ebenfalls absolut konvergiert.
- c) Sei nun  $\left( \sum_{k=1}^n a_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergent und  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ . Beweisen oder widerlegen Sie, daß dann die Reihe  $\left( \sum_{k=1}^n a_k b_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$  ebenfalls konvergiert.

### Aufgabe 41: (F20T1A3)

- a) Bestimmen Sie alle Lösungen der folgenden Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$x'' - x = e^t$$

- b) Die Funktionen  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sind gegeben durch  $\varphi_1(t) := 1$ ,  $\varphi_2(t) := t$  und  $\varphi_3(t) := t^2$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ . Über eine lineare inhomogene Differentialgleichung zweiter Ordnung ist bekannt, daß  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  und  $\varphi_3$  Lösungen sind. Geben Sie die Menge aller Lösungen dieser Differentialgleichung an. Die Differentialgleichung selbst brauchen Sie dabei nicht zu bestimmen.

### Aufgabe 42: (F20T2A5)

Untersuchen Sie für jeden Parameterwert  $a \in \mathbb{R}$  die Stabilitätseigenschaften der Ruhelage  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$  des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= ax_1 + x_2 + (a+1)x_1^2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 + ax_2 \end{aligned}.$$