

Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 34: (H12T1A3)

- a) Sei g eine positive differenzierbare Funktion. Welche Stammfunktion hat dann $\frac{g'}{g}$?
- b) Bestimmen Sie die Lösung $y = \varphi(x)$ des Anfangswertproblems

$$y' = -xy \ln(y), \quad y(0) = e$$

und deren maximalen Definitionsbereich. Zeigen Sie, daß die Lösung auf diesem Definitionsbereich der Abschätzung $1 \leq \varphi(x) \leq e$ genügt und skizzieren Sie den Graphen der Funktion φ .

Aufgabe 35: (H08T1A5)

Zeigen Sie, daß jede auf ihren maximalen Definitionsbereich fortgesetzte Lösung der Differentialgleichung

$$y' = \exp(y) \cdot \sin(y)$$

bereits auf ganz \mathbb{R} definiert ist.

Aufgabe 36: (F18T2A4)

Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$y'(x) = \sin(x) \sqrt{1 + 4y(x)}, \quad y(0) = y_0$$

zu Anfangswerten $y_0 \in [-\frac{1}{4}, \infty[$.

- a) Geben Sie eine möglichst große Menge von Anfangswerten an, für die das Anfangswertproblem lokal eindeutig lösbar ist. Begründen Sie, warum in den entsprechenden Anfangswerten lokale Eindeutigkeit der Lösung vorliegt.
- b) Geben Sie für Anfangswerte, für die eindeutige Lösbarkeit nicht gegeben ist, zwei verschiedene Lösungen an.