

## Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

### Aufgabe 34: (H12T1A3)

- a) Sei  $g$  eine positive differenzierbare Funktion. Welche Stammfunktion hat dann  $\frac{g'}{g}$ ?
- b) Bestimmen Sie die Lösung  $y = \varphi(x)$  des Anfangswertproblems

$$y' = -xy \ln(y), \quad y(0) = e$$

und deren maximalen Definitionsbereich. Zeigen Sie, daß die Lösung auf diesem Definitionsbereich der Abschätzung  $1 \leq \varphi(x) \leq e$  genügt und skizzieren Sie den Graphen der Funktion  $\varphi$ .

### Aufgabe 35: (H08T1A5)

Zeigen Sie, daß jede auf ihren maximalen Definitionsbereich fortgesetzte Lösung der Differentialgleichung

$$y' = \exp(y) \cdot \sin(y)$$

bereits auf ganz  $\mathbb{R}$  definiert ist.

### Aufgabe 36: (F18T2A4)

Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$y'(x) = \sin(x) \sqrt{1 + 4y(x)}, \quad y(0) = y_0$$

zu Anfangswerten  $y_0 \in [-\frac{1}{4}, \infty[$ .

- a) Geben Sie eine möglichst große Menge von Anfangswerten an, für die das Anfangswertproblem lokal eindeutig lösbar ist. Begründen Sie, warum in den entsprechenden Anfangswerten lokale Eindeutigkeit der Lösung vorliegt.
- b) Geben Sie für Anfangswerte, für die eindeutige Lösbarkeit nicht gegeben ist, zwei verschiedene Lösungen an.