Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 31: (F18T1A2) Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen.
Seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei beliebige Funktionen. Dann gilt:

a) Ist f stetig, dann ist $\begin{aligned} h : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int\limits_0^{g(x)} f(t)dt \end{aligned}$ ebenfalls stetig.

b) Ist f stetig und ist g differenzierbar, dann ist $\begin{aligned} h : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int\limits_0^{g(x)} f(t)dt \end{aligned}$ ebenfalls differenzierbar.

c) Ist f beschränkt und differenzierbar und existiert $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)$ im eigentlichen Sinne (dh. dieser Grenzwert existiert und hat einen endlichen Wert), dann gilt $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = 0$.

Aufgabe 32: (H13T1A3)
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{für } y \le 0 \text{ oder } y \ge x^2 \\ 1 & \text{für } 0 < y < x^2 \end{cases}$$

Beweisen Sie, daß f in $(0,0)$ unstetig ist, aber dort sämtliche Richtungsableitungen existieren.

Aufgabe 33: (H18T1A2)
Bezeichne $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \ge -x^2\}$ den Definitionsbereich der Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) := x^2 + y^2 + 2y$.

a) Skizzieren Sie die Menge D.

b) Zeigen Sie, daß die Funktion f ein globales Minimum besitzt.

c) Bestimmen Sie das globale Minimum von f sowie alle Stellen in D, bei denen dieses angenommen wird.