Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 28: (H18T3A2)

a) Sei $f : \mathbb{C}\backslash\{-1\} \to \mathbb{C}$ definiert durch $f(z) := \frac{3z+1}{u+1}$. Bestimmen Sie das Bild von $B_1(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ unter f.

b) Es seien $B_2(1) = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| < 2\}$ und $G := \{x + iy \in \mathbb{C} : x, y \in \mathbb{R}, x < 0\}$. Bestimmen Sie eine biholomorphe Abbildung $g : B_2(1) \to G$.

c) Zeigen oder widerlegen Sie, daß es eine biholomorphe Abbildung

$$h : \mathbb{C}\backslash\{x + iy : y = 0, x \in \mathbb{R}\backslash]-1,1[\} \to B_1(0)$$

gibt.

Aufgabe 29: (H18T1A4)
In dieser Aufgabe bezeichne $H := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\,(z) > 0\}$ die obere Halbebene und $S := \{z \in \mathbb{C} : 0 < \mathrm{Re}\,(z) < 1\}$ einen Streifen in $\mathbb{C}$.

a) Geben Sie (mit Begründung) eine holomorphe bijektive Abbildung $g : S \to H$ an.

b) Bestimmen Sie eine holomorphe, bijektive Abbildung $S \to S$ mit $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$.

Aufgabe 30: (F17T3A1)
Es seien $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ein Polynom sowie $\gamma_{r,w}$ der positiv orientierte Rand der Kreisscheibe mit Radius $r > 0$ um $w \in \mathbb{C}$. Beweisen Sie für das komplexe Wegintegral

$$\int_{\gamma_{r,w}} \overline{p(z)}dz = 2\pi i r^2 \overline{p'(w)}$$