Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 1: (F08T3A3)
Die Funktion $f : \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ sei holomorph und es gelte $|f(z)| \geq |e^z|$ für alle $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$. Man zeige, daß f in allen Punkten aus $\mathbb{Z}$ holomorph ergänzbar ist und daß $f(z) = Ce^z$ mit einer Konstanten C gilt.

Aufgabe 2: (F06T2A3)
Bestimmen Sie alle holomorphen Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, die $f(e^{\sqrt{2}\pi in}) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllen.

Aufgabe 3: (H17T1A1)

a) Ist die Menge $A := \{z \in \mathbb{C} : |z| + \mathrm{Re}\,(z) \leq 1\}$ abgeschlossen in $\mathbb{C}$? Falls ja, bestimmen Sie, ob A kompakt ist.

b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{5n^2} z^n$$

c) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen. Es seien C^1-Funktionen $u : \Omega \to \mathbb{R}$ und $v : \Omega \to \mathbb{R}$ gegeben, die die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllen. Bestimmen Sie, ob die Funktionen $g(x,y) := e^{u(x,y)}\cos(v(x,y))$ und $h(x,y) = e^{u(x,y)}\sin(v(x,y))$ für $x + iy \in \Omega$ die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllen oder nicht.