

Tutoriumsblatt 6 zu Mathematik II für Physiker

Aufgabe 1:

Das Vektorprodukt in \mathbb{R}^3 ist definiert wie folgt:

$$\begin{aligned} \times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\underline{x}, \underline{y}) = \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right) &\mapsto \underline{x} \times \underline{y} := \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und es sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt in \mathbb{R}^3 . Zeige: Für alle $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z} \in \mathbb{R}^3$ und alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt:

- a) $\underline{x} \times \underline{y} = -\underline{y} \times \underline{x}$,
- b) $\underline{x} \times (\lambda \underline{y} + \mu \underline{z}) = \lambda \underline{x} \times \underline{y} + \mu \underline{x} \times \underline{z}$
- c) $\underline{x} \times \underline{y} = \underline{0}$ genau dann wenn $\underline{x}, \underline{y}$ linear abhängig sind.
- d) Es sei $(\underline{x} \times \underline{y})_i$ die i -te Komponente von $\underline{x} \times \underline{y}$ dann gilt

$$(\underline{x} \times \underline{y})_i = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} x_j y_k,$$

wobei ε_{ijk} definiert ist durch

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} \text{sign}(\pi), & \text{falls } (i, j, k) = (\pi(1), \pi(2), \pi(3)) \text{ für } \pi \in \mathcal{S}_3 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

- e) $\underline{x} \times (\underline{y} \times \underline{z}) = \langle \underline{x}, \underline{z} \rangle \underline{y} - \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle \underline{z}$.

Aufgabe 2:

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Finde eine selbstadjungierte Matrix $B \in M_3(\mathbb{R})$ mit $B^3 = A$.

Aufgabe 3: Es sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt auf \mathbb{R}^3 und

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Finde eine Orthonormalbasis $(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3)$ von \mathbb{R}^3 so daß die quadratische Form

$$\begin{aligned} q_B : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ \underline{x} &\mapsto \langle \underline{x}, B\underline{x} \rangle \end{aligned}$$

bei Entwicklung von $\underline{x} = a_1 \underline{v}_1 + a_2 \underline{v}_2 + a_3 \underline{v}_3$ bzgl. dieser Basis nur quadratische Terme $\lambda_1 a_1^2 + \lambda_2 a_2^2 + \lambda_3 a_3^2$ enthält. Was sind hier $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$?