Tutoriumsblatt 12 zu Mathematik II für Physiker

Aufgabe 1:
Sind X und Y $\mathbb{K}$-Banachräume über demselben Körper $\mathbb{K}$, $U \subseteq X$ offen und $f : U \to Y$ und $g : U \to Y$ differenzierbar in $a \in U$. Dann ist für jedes $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ die Abbildung $\begin{array}{rcl} \lambda f + \mu g : U & \to & Y \\ x & \mapsto & \lambda f(x) + \mu g(x) \end{array}$ in a differenzierbar mit

$$(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a). \tag{1}$$

Aufgabe 2: Zeige: Es sei X ein Banachraum, $U \subseteq X$ offen, $a \in U$, $f : U \to \mathbb{K}$ und $g : U \to \mathbb{K}$ seien stetig und in a differenzierbar mit $g(a) \neq 0$. Dann ist

$$\begin{array}{rcl} \frac{f}{g} : V & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \frac{f(x)}{g(x)} \end{array}$$

auf der offenen Menge $V := g^{-1}(\mathbb{K} \backslash \{0\})$ wohldefiniert und in a differenzierbar mit

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{g(a)f'(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2} \tag{2}$$

Aufgabe 3:
Zeige, daß $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & \mapsto & x_1^3 x_2^2 - x_2^2 \end{array}$ in jedem Punkt $\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ differenzierbar ist und bestimme die Ableitung $(Df)(\underline{a})$.