Tutoriumsblatt 11 zu Mathematik II für Physiker

Aufgabe 1:
Zeige, daß $\begin{aligned} f : \mathbb{C}\backslash\{0\} &\to \mathbb{C}\backslash\{0\} \\ z &\mapsto \frac{1}{z} \end{aligned}$ stetig ist.

Aufgabe 2: Zeige:

a) $\begin{aligned} \sin : \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \sin(z) \end{aligned}$ hat dieselben Nullstellen wie $\begin{aligned} \sin|_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ z &\mapsto \sin(z) \end{aligned}$ und
$\begin{aligned} \cos : \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \cos(z) \end{aligned}$ hat dieselben Nullstellen wie $\begin{aligned} \cos|_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ z &\mapsto \cos(z) \end{aligned}$

b) $\{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} = \{x \in \mathbb{R} : \sin(x) = 0\}$ und $\{(2k+1)\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\} = \{x \in \mathbb{R} : \cos(x) = 0\}$

Aufgabe 3:
Es seien X_1, X_2, Y Vektorräume über demselben Körper $\mathbb{K}$. Eine Abbildung $\phi : X_1 \times X_2 \to Y$ heißt **bilinear**, wenn für jedes $a_2 \in X_2$ die Abbildung $\begin{aligned} X_1 &\to Y \\ x_1 &\mapsto \phi(x_1, a_2) \end{aligned}$ und für jedes $a_1 \in X_1$ die Abbildung $\begin{aligned} X_2 &\to Y \\ x_2 &\mapsto \phi(a_1, x_2) \end{aligned}$ $\mathbb{K}$-linear ist. Zeige: Sind $(X_1, \|\cdot\|_1)$, $(X_2, \|\cdot\|_2), (Y, \|\cdot\|)$ Banachräume über demselben Körper $\mathbb{K}$, dann sind für eine bilineare Abbildung $\phi : X_1 \times X_2 \to Y$ äquivalent:

a) ϕ ist stetig (bezüglich der Produkttopologie auf $X_1 \times X_2$ aus der Normtopologie $\mathcal{O}_{\|\cdot\|_1}$ auf X_1 und $\mathcal{O}_{\|\cdot\|_2}$ auf X_2 und der Normtopologie $\mathcal{O}_{\|\cdot\|}$ auf Y).

b) ϕ ist stetig in $\mathbf{0}$.

c) Es gibt $C \in]0, \infty[$ mit

$$\|\phi(x_1, x_2)\| \leq C\|x_1\|_1\|x_2\|_2 \tag{1}$$

für alle $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$.