

Übungsblatt 9 zu Mathematik II für Physiker

Aufgabe 24: (10 Punkte):

Es sei (X, \mathcal{O}) ein zusammenhängender topologischer Raum, $\emptyset \neq A \subseteq X$ mit $\partial(A) = \emptyset$. Zeige: $A = X$.

Aufgabe 25: (10 Punkte):

Bestimme von $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Nullstelle in $[-1, 0]$ bis auf eine Abweichung von höchstens 0, 1.

$$x \mapsto \sin(x^2 - 1) + \cos(x) + x^3$$

Aufgabe 26: (10 Punkte): Es sei (X, \mathcal{O}_X) ein kompakter topologischer Raum, (Y, \mathcal{O}_Y) ein hausdorffscher topologischer Raum und $f : X \rightarrow Y$ sei stetig und bijektiv. Zeige, daß dann f ein Homöomorphismus ist.

Abgabe je Zweier-/ Dreiergruppe eine Lösung bis Mittwoch, den 24.6.2020, 15 Uhr via Uni2work. Geben Sie auf den Lösungen die Namen an.

Ergänzungsaufgabe 3 (ohne Punkte/ Abgabe)

Es sei $\emptyset \neq I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Zeige:

$$V := \{(x, y) \in I \times I : x < y\} \tag{1}$$

ist eine zusammenhängende Teilmenge von \mathbb{R}^2 .

Anleitung: Fixiere $z = (z_1, z_2) \in V$ und betrachte zu $w = (w_1, w_2) \in V$ die Abbildung

$$\begin{aligned} \alpha_w : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto tz + (1-t)w \end{aligned}$$

Ergänzungsaufgabe 4 (ohne Punkte/ Abgabe)

Es seien X und Y zwei homöomorphe topologische Räume, dies bedeutet, daß ein Homöomorphismus $f : X \rightarrow Y$ existiert. Zeige:

- a) Für $x \in X$ sind auch $X \setminus \{x\}$ und $Y \setminus \{f(x)\}$ homöomorph.
- b) X ist genau dann zusammenhängend, wenn Y zusammenhängend ist.
- c) \mathbb{R} und \mathbb{R}^2 sind nicht homöomorph.