

Übungsblatt 8 zu Mathematik II für Physiker

Aufgabe 21: (15 Punkte):

$\widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ wird wie in Kapitel 5.6 mit $d : \widehat{\mathbb{R}} \times \widehat{\mathbb{R}} \rightarrow [0, \infty[$ und $(x, y) \mapsto |F(x) - F(y)|$

$F : \widehat{\mathbb{R}} \rightarrow [-1, 1]$ zu einem metrischen und damit auch zu einem

$$x \mapsto F(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x = \infty \\ \frac{x}{1+|x|} & \text{für } x \in \mathbb{R} \\ -1 & \text{für } x = -\infty \end{cases}$$

topologischen Raum $(\widehat{\mathbb{R}}, \mathcal{O}_d)$.

a) Zeige: Die Standardtopologie $\mathcal{O}_{\mathbb{R}}$ auf \mathbb{R} und die von \mathcal{O}_d auf \mathbb{R} definierte Relativtopologie \mathcal{O} sind gleich. Hinweis: Lemma 5.6.5 könnte helfen!

b) Zeige: ∞ ist ein Berührungspunkt von \mathbb{R} in $\widehat{\mathbb{R}}$.

c) Entscheide, für $c \in \widehat{\mathbb{R}}$ und $k \in \mathbb{N}$ welche der Funktionen $f_c : \mathbb{R} \rightarrow \widehat{\mathbb{R}}$ und $g_k : \mathbb{R} \rightarrow \widehat{\mathbb{R}}$ $x \mapsto c$ $x \mapsto x^k$ und $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ einen Grenzwert für $x \rightarrow \infty$ besitzt und bestimme diesen gegebenenfalls.

Aufgabe 22: (10 Punkte):

Zeige, daß

$$\frac{x \sin(y)}{10} - \frac{y^4}{10} - x = -\frac{1}{10}$$

$$\frac{y \sin(x)}{10} + \frac{x \cos(y)}{10} + y = 0$$

genau eine Lösung ξ in $M := \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \times [-1, 1]$ hat. Bestimme die ersten drei Iterationsschritte zur iterativen Bestimmung dieser Lösung, ausgehend vom Startwert $x_0 = (0, 0)$. Wie viele Iterationsschritte braucht man um diese Lösung mit einem Fehler von höchstens 0,001 zu bestimmen.

Aufgabe 23: (15 Punkte):

a) Es sei X ein \mathbb{C} -Banachraum und $(c_{(j_1, j_2)})_{(j_1, j_2) \in \mathbb{N}_0^2}$ eine Familie in X und es seien $(b_1, b_2) \in \mathbb{C}^2$ mit $b_1, b_2 \neq 0$,

$$C := \sup \left\{ \|c_{(j_1, j_2)}\| |b_1^{j_1}| |b_2^{j_2}| : (j_1, j_2) \in \mathbb{N}_0^2 \right\} < \infty$$

und $r_1 \in]0, |b_1|[$ und $r_2 \in]0, |b_2|[$. Zeige, daß für $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ mit $|z_1| \leq r_1$ und $|z_2| \leq r_2$

der Grenzwert $\sum_{j_1, j_2=0}^{\infty} c_{(j_1, j_2)} z_1^{j_1} z_2^{j_2}$ in X existiert und

$$f : \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1| \leq r_1, |z_2| \leq r_2\} \rightarrow X$$

$$(z_1, z_2) \mapsto \sum_{j_1, j_2=0}^{\infty} c_{(j_1, j_2)} z_1^{j_1} z_2^{j_2}$$

eine stetige Funktion definiert.

b) Zeige, daß

$$f : \mathbb{C} \times \{z_2 \in \mathbb{C} : |z_2| < 1\} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$(z_1, z_2) \mapsto \sum_{j_1, j_2=1}^{\infty} \frac{1}{j_1!} z_1^{j_1} z_2^{j_2}$$

stetig ist und bestimme $\lim_{(z_1, z_2) \rightarrow (2, \frac{i}{2})} f(z_1, z_2)$.

Abgabe je Zweier-/ Dreiergruppe eine Lösung bis Mittwoch, den 17.6.2020, 15 Uhr via Uni2work. Geben Sie auf den Lösungen die Namen an.