

Übungsblatt 7 zu Mathematik II für Physiker

Aufgabe 18: (10 Punkte): Es sei (X, \mathcal{O}) ein topologischer Raum $A, B \subseteq X$. Es bezeichne \bar{A} den Abschluß von A , $\overset{\circ}{B}$ den offenen Kern von B und $\partial(A) = \bar{A} \setminus \overset{\circ}{A}$ den Rand von A .

- a) Zeige: Ist $A \subseteq B$, so gilt $\bar{A} \subseteq \bar{B}$ und $\overset{\circ}{A} \subseteq \overset{\circ}{B}$.
- b) Zeige: $\partial(\bar{A}) \subseteq \partial(A)$ und $\partial(\overset{\circ}{A}) \subseteq \partial(A)$.
- c) Gib ein Beispiel von $A \subseteq \mathbb{R}$ an, so daß bezüglich der Standardtopologie $\mathcal{O}_{\mathbb{R}}$ auf \mathbb{R} die drei Mengen $\partial(\bar{A})$, $\partial(A)$ und $\partial(\overset{\circ}{A})$ alle verschieden sind.

Aufgabe 19: (10 Punkte):

Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Zu $x \in X$ und $r > 0$ sei $\bar{K}(x, r) := \{y \in X : d(x, y) \leq r\}$ und $\overset{\circ}{K}(x, r)$ der Abschluß von $K(x, r) := \{y \in X : d(x, y) < r\}$ bezüglich der durch die Metrik induzierten Topologie, \mathcal{O}_d . Zeige:

- a) $\overline{\overset{\circ}{K}(x, r)} \subseteq \bar{K}(x, r)$.
- b) Falls $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum ist, so gilt

$$\overline{\overset{\circ}{K}(x, r)} = \bar{K}(x, r).$$
- c) Gib ein Beispiel einer Metrik $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty[$ und von $x \in \mathbb{R}, r > 0$ mit $\overline{\overset{\circ}{K}(x, r)} \neq \bar{K}(x, r)$ an.

Aufgabe 20: (15 Punkte):

- a) Es sei (X, \mathcal{O}_X) ein topologischer Raum, (Y, \mathcal{O}_Y) ein hausdorffscher topologischer Raum und $f : X \rightarrow Y$ und $g : X \rightarrow Y$ stetige Funktionen. Ferner sei $A \subseteq X$ und

$$h : X \rightarrow Y$$

$$x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in A \\ g(x) & \text{für } x \in X \setminus A \end{cases}.$$

In welchen Punkten $x \in X$ ist h stetig?

- b) $\mathcal{O}_{\mathbb{R}}$ sei die Standardtopologie auf \mathbb{R} und \mathbb{R}^2 sei mit der Produkttopologie aus $\mathcal{O}_{\mathbb{R}}$ mit $\mathcal{O}_{\mathbb{R}}$ versehen. In welchen Punkten $x \in \mathbb{R}$ ist die Funktion

$$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$x \mapsto \begin{cases} (x^2, 1-x) & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ (1-x, 3x^3) & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

stetig?

Abgabe je Zweier-/ Dreiergruppe eine Lösung bis Mittwoch, den 10.6.2020, 15 Uhr via Uni2work. Geben Sie auf den Lösungen die Namen an.