Übungsblatt 6 zu Mathematik II für Physiker

Aufgabe 15: (15 Punkte): Das Vektorprodukt in $\mathbb{R}^3$ ist definiert wie folgt:

$$\begin{aligned} \times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ (\underline{x}, \underline{y}) = \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right) &\mapsto \underline{x} \times \underline{y} := \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und es sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt in $\mathbb{R}^3$. Zeige: Für alle $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z} \in \mathbb{R}^3$ gilt:

a) $\det(\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}) = \langle \underline{x} \times \underline{y}, \underline{z} \rangle$.

b) $\underline{x} \times \underline{y}$ ist orthogonal zu $\mathrm{lin}\{\underline{x}, \underline{y}\}$.

c) Falls $\underline{x}, \underline{y}$ orthogonale Einheitsvektoren sind, dann sind $\underline{x}, \underline{y}, \underline{x} \times \underline{y}$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$.

d) Zeige, daß die Abbildung

$$\begin{aligned} f : \{(\underline{x}, \underline{y}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 : \|\underline{x}\| = \|\underline{y}\| = 1, \underline{x} \perp \underline{y}\} &\longrightarrow SO(3) \\ (\underline{x}, \underline{y}) &\longmapsto (\underline{x} \,|\, \underline{y} \,|\, \underline{x} \times \underline{y}) \end{aligned}$$

wohldefiniert und bijektiv ist.

Aufgabe 16: (10 Punkte):
Es sei $A \in M_n(\mathbb{R})$ selbstadjungiert. Zeige: Es gibt ein selbstadjungiertes $B \in M_n(\mathbb{R})$ mit $B^3 = A$. Wieso geht dies in dieser Allgemeinheit nicht, wenn man ein selbstadjungiertes $C \in M_n(\mathbb{R})$ mit $C^2 = A$ sucht?

Aufgabe 17: (10 Punkte): Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -2 \\ -1 & 8 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Zeige, daß es für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine selbstadjungierte Matrix $B_n \in M_3(\mathbb{R})$ gibt mit $B_n^n = A$ und gib ein Beispiel für B_n an.

Abgabe je Zweier-/ Dreiergruppe eine Lösung bis Mittwoch, den 3.6.2020, 15 Uhr via Uni2work. Geben Sie auf den Lösungen die Namen an.