Übungsblatt 5 zu Mathematik II für Physiker

Aufgabe 12: (10 Punkte): Nach H11.1 wird

$$l^2(\mathbb{N}) := \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \in \mathbb{C}, \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \right\}$$

zusammen mit

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle_{l^2(\mathbb{N})} : l^2(\mathbb{N}) \times l^2(\mathbb{N}) &\to \mathbb{C} \\ ((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}) &\mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \overline{x_n} y_n \end{aligned}$$

zu einem $\mathbb{C}-$Vektorraum mit Skalarprodukt.

a) Für $k \in \mathbb{N}$ sei $f_k := \left(\left(\frac{1}{(1+i)^k} \right)^n \right)_{n\in\mathbb{N}}$. Zeige $f_k \in l^2(\mathbb{N})$.

b) Bestimme eine Orthonormalbasis von $\mathrm{lin}\{f_1, f_2\} \subseteq l^2(\mathbb{N})$.

Aufgabe 13: (10 Punkte): Es sei $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}^d}$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{C}^d$ und $A \in M_d(\mathbb{C})$ selbstadjungiert mit Eigenwerten $\lambda_1, ..., \lambda_d \in]0, \infty[$. Zeige, daß

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle_A : \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^d &\to \mathbb{C} \\ (\underline{x}, \underline{y}) &\mapsto \langle \underline{x}, A\underline{y} \rangle_{\mathbb{C}^d} \end{aligned}$$

ein Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^d$ ist.

Aufgabe 14: (10 Punkte): Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

a) Zeige, daß es eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von A gibt und bestimme eine solche.

b) Zeige, daß $\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle_A : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 &\to \mathbb{C} \\ (\underline{x}, \underline{y}) &\mapsto \langle \underline{x}, A\underline{y} \rangle_{\mathbb{C}^3} \end{aligned}$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^3$ definiert und berechne eine Orthonormalbasis von $\mathrm{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ bzgl. $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$.

Abgabe je Zweier-/ Dreiergruppe eine Lösung bis Mittwoch, den 27.5.2020, 15 Uhr via Uni2work. Geben Sie auf den Lösungen die Namen an.