

Übungsblatt 4 zu Mathematik II für Physiker

Aufgabe 10: (15 Punkte)

- a) Es sei $\|\cdot\| : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty[$ eine Norm auf \mathbb{R}^d . Zeige, daß
- $$\underline{x} \mapsto \|\underline{x}\|$$

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : M_d(\mathbb{R}) &\rightarrow [0, \infty[\\ A &\mapsto \|A\| := \sup\{\|A\underline{x}\| : \underline{x} \in \mathbb{R}^d, \|\underline{x}\| \leq 1\} \end{aligned}$$

eine Norm auf $M_d(\mathbb{R})$ definiert (von $\|\cdot\|$ induzierte Matrixnorm) und

$$\begin{aligned} \|A\underline{x}\| &\leq \|A\| \|\underline{x}\| \\ \|AB\| &\leq \|A\| \|B\| \end{aligned}$$

für alle $\underline{x} \in \mathbb{R}^d$ und $A, B \in M_d(\mathbb{R})$ gilt.

- b) Zeige, daß die von $\|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty[$ induzierte Matrixnorm $\|\cdot\|_\infty$
 $(x_1, \dots, x_d) \mapsto \sup\{|x_l| : l = 1, \dots, d\}$

für $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1d} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{d1} & \cdots & a_{dd} \end{pmatrix} \in M_d(\mathbb{R})$ gegeben ist als

$$\|A\|_\infty = \max \left\{ \sum_{j=1}^d |a_{ij}| : i = 1, \dots, d \right\}.$$

Aufgabe 11: (20 Punkte)

Berechne für die Matrix

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

das charakteristische Polynom, alle verallgemeinerten Eigenräume und Haupträume. Entscheide, ob es eine Basis \mathcal{B} von \mathbb{R}^3 gibt, so daß die \mathbb{R} -lineare Abbildung $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine darstellende Matrix $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F_A)$ in Jordanform besitzt und gib gegebenenfalls diese Jordanform zusammen mit den Transformationsmatrizen an. Berechne für $t \in \mathbb{R}$ die Matrix e^{tA} .

Abgabe je Zweier-/ Dreiergruppe eine Lösung bis Mittwoch, den 20.5.2020, 15 Uhr via Uni2work. Geben Sie auf den Lösungen die Namen an.