

## Ferienblatt zu Mathematik II für Physiker

### Aufgabe 36: (10 Punkte):

Es sei  $U := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_1^3 - x_2 x_3 > 0 \right\}$ . Zeige, daß  $U \subseteq \mathbb{R}^3$  offen ist und

$$\begin{aligned} f : U &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} \frac{x_1 x_2}{x_1^3 - x_2 x_3} \\ \sqrt{\frac{x_1^3 - x_2 x_3}{x_1^3}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

in jedem Punkt  $a \in U$  differenzierbar ist und berechne die Ableitung und die Jacobimatrix in jedem  $a \in U$ .

### Aufgabe 37: (10 Punkte):

Es sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Zeige

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{für } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- Die partiellen Ableitungen  $(D_1 f)(0, 0)$  und  $(D_2 f)(0, 0)$  existieren.
- Die Richtungsableitungen  $(D_v f)(0, 0)$  existieren für  $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(1, 0), (0, 1)\}$  nicht.
- $f$  ist in  $(0, 0)$  nicht differenzierbar.

### Aufgabe 38: (15 Punkte):

Es sei  $X$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Eine Teilmenge  $K \subseteq X$  heißt **konvex**, wenn für alle  $x, y \in K$  auch die Verbindungsstrecke

$$[x, y] := \{x + t(y - x) : t \in [0, 1]\} \subseteq K$$

in  $K$  enthalten ist. Ist  $K \subseteq X$  konvex, dann heißt eine Funktion  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  **konvex**, wenn

$$f((1 - t)x + ty) \leq (1 - t)f(x) + tf(y)$$

für alle  $x, y \in K$  und  $t \in [0, 1]$  erfüllt ist.  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **konkav**, wenn  $-f$  konvex ist. Zeige:

- $K \subseteq X$  ist genau dann konvex, wenn für alle  $a, b \in K$  mit  $a \neq b$  ein Intervall  $I_{a,b} \subseteq \mathbb{R}$  existiert, so daß für  $\varphi_{a,b} : \mathbb{R} \rightarrow X$  gilt:  

$$t \mapsto a + t(b - a)$$

$$\varphi_{a,b}(\mathbb{R}) \cap K = \varphi_{a,b}(I_{a,b}).$$

- $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  ist genau dann konvex, wenn für alle  $a, b \in K$  mit  $a \neq b$  die Funktion  $f \circ (\varphi_{a,b}|_{I_{a,b}}) : I_{a,b} \rightarrow \mathbb{R}$  konvex ist.
- Es sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein offenes Intervall und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar.  $f$  ist genau dann konvex, wenn  $f'$  monoton wachsend ist.

### Aufgabe 39: (15 Punkte)

Sind  $y \in \mathbb{R}$  und  $a > 0$ , so ist  $a^y := e^{y \ln(a)}$ . Zeige:

- $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist konvex und  $\ln : ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  ist konkav.  

$$x \mapsto e^x \qquad x \mapsto \ln(x)$$

b) Ist  $p \in ]1, \infty[$  und  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , so gilt für alle  $x, y \in [0, \infty[$ :

$$xy \leq \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q$$

c) Für  $p \in ]1, \infty[$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  und  $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{K}^d$  sei

$$\|x\|_p := (|x_1|^p + \dots + |x_d|^p)^{\frac{1}{p}}$$

dann ist  $\|\cdot\|_p : \mathbb{K}^d \rightarrow [0, \infty[$  eine Norm und für  $x = (x_1, \dots, x_d), y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{K}^d$  gilt:

$$\sum_{k=1}^d |x_k y_k| \leq \|x\|_p \|y\|_q$$

#### Aufgabe 40: (10 Punkte)

Zeige: Für alle  $x \in ]-1, 1[$  gilt:

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \\ \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) &= 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \end{aligned}$$

#### Aufgabe 41: (10 Punkte)

Es sei  $f : ]-1, 1[ \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Zeige:  $f$  ist differenzierbar,

$$t \mapsto \begin{cases} (0, 0) & \text{für } t \in ]-1, 0] \\ (t^2 \sin(\frac{1}{t}), t^2 \cos(\frac{1}{t})) & \text{für } t \in ]0, 1[ \end{cases}$$

aber  $f'$  ist nicht stetig und  $f' : ]-1, 1[$  ist nicht zusammenhängend.

#### Aufgabe 42: (10 Punkte)

Es sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Zeige:

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} & \text{für } y > 0 \\ x & \text{für } y = 0 \\ -\sqrt{x^2 + y^2} & \text{für } y < 0 \end{cases}$$

a) Für jedes  $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  existiert die Richtungsableitung  $(D_v f)(0, 0)$  von  $f$  in  $(0, 0)$  in Richtung  $v$ .

b)  $f$  ist in  $(0, 0)$  nicht differenzierbar.

**Abgabe je Zweier-/ Dreiergruppe eine Lösung bis Montag, den 19.10.2020, 15 Uhr via Uni2work oder per E-Mail an [hdjaskolla@gmx.de](mailto:hdjaskolla@gmx.de). Geben Sie auf den Lösungen die Namen an.**