Übungsblatt 10 zu Mathematik II für Physiker

Aufgabe 27: (15 Punkte):
Es sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum, $(c_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge in X mit $c_0 = 0$ und die Potenzreihe $\left(\sum_{k=0}^{n} c_k z^k\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ habe den Konvergenzradius 1. Zeige, daß

$$\begin{aligned} f : \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} &\to X \\ z &\mapsto \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} g : \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} &\to X \\ z &\mapsto \sum_{k=1}^{\infty} f(z^k) \end{aligned}$$

stetige Funktionen sind.

Aufgabe 28: (10 Punkte):

$$l^2(\mathbb{Z}) := \left\{ x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} : x_n \in \mathbb{C}, \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|^2 = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} |x_n|^2 < \infty \right\}$$

ist ein Spezialfall von $l^2(I, X)$, wie in H 11.1 im Wintersemester eingeführt. Analog wie für $l^2(\mathbb{N})$ auf Seite 218a) und 218b) gezeigt, ist auch $l^2(\mathbb{Z})$ vollständig. Zeige:

a) Für $c \in \mathbb{C}$ und $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$ definiert

$$(T_c(x))_n := c(x_{n-1} - x_{n+1})$$

ein

$$T_c(x) = ((T_c(x))_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$$

b) und

$$\begin{aligned} T_c : l^2(\mathbb{Z}) &\to l^2(\mathbb{Z}) \\ x &\mapsto T_c(x) \end{aligned}$$

ist eine stetige lineare Abbildung mit Operatornorm $|||T_c||| \leq 2|c|$.

c) Für $|c| < \frac{1}{2}$ ist $\mathrm{id}_{l^2(\mathbb{Z})} + T_c$ invertierbar.

Aufgabe 29: (10 Punkte):
Es seien $\|\cdot\|_{V,1} : V \to [0, \infty[$ und $\|\cdot\|_{V,2} : V \to [0, \infty[$ äquivalente Normen auf V und ebenso $\|\cdot\|_{W,1} : W \to [0, \infty[$ und $\|\cdot\|_{W,2} : W \to [0, \infty[$ äquivalente Normen auf W. Zeige:

a) Eine lineare Abbildung $T : V \to W$ ist genau dann stetig bzgl. der von $\|\cdot\|_{V,1}$ und $\|\cdot\|_{W,1}$ definierten Normtopologien, wenn sie bzgl. der von $\|\cdot\|_{V,2}$ und $\|\cdot\|_{W,2}$ definierten Normtopologien stetig ist. [1]

[1] als Konsequenz aus a) können wir nun die stetigen linearen Abbildungen $L(V, W)$ zwischen V und W – versehen mit einer dieser Normtopolgien auf V bzw. W betrachten und bekommen dasselbe $L(V, W)$.

b) Die von $\|\cdot\|_{V,1}$ und $\|\cdot\|_{W,1}$ auf $L(V,W)$ definierte Operatornorm

$$|||T|||_1 := \sup\{\|T(v)\|_{W,1} : v \in V, \|v\|_{V,1} \leq 1\}$$

ist äquivalent zu

$$|||T|||_2 := \sup\{\|T(v)\|_{W,2} : v \in V, \|v\|_{V,2} \leq 1\}$$

c) Ist $(W, \|\cdot\|_{W,1})$ ein Banachraum, dann sind auch $(L(V,W), |||\cdot|||_1)$ und $(L(V,W), |||\cdot|||_2)$ Banachräume.

Abgabe je Zweier-/ Dreiergruppe eine Lösung bis Mittwoch, den 1.7.2020, 15 Uhr via Uni2work. Geben Sie auf den Lösungen die Namen an.

Ergänzungsaufgabe 5 (ohne Punkte/ Abgabe)
Es seien X und Y $\mathbb{K}-$Banachräume und $F : X \to Y$ eine stetige lineare Abbildung. Zeige:

a) Ist $\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Reihe in X, dann ist $\left(\sum_{k=1}^{n} F[x_k]\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Reihe in Y und in diesem Fall gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} F[x_k] = F\left[\sum_{k=1}^{\infty} x_k\right]$$

für den Grenzwert.

b) Ist $\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine absolut konvergente Reihe in X, dann ist $\left(\sum_{k=1}^{n} F[x_k]\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine absolut konvergente Reihe in Y und in diesem Fall gilt für jedes bijektive $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} F[x_{\sigma(k)}] = F\left[\sum_{k=1}^{\infty} x_{\sigma(k)}\right]$$

für den Grenzwert.