Übungsblatt 1 zu Mathematik II für Physiker

Aufgabe 1: (10 Punkte)
Überlege zunächst, wie sich die Determinanten der folgenden Matrizen möglichst geschickt bestimmen lassen und berechne diese anschließend:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 7 & 5 \\ 3 & 9 & -1 & 1 \\ 6 & 18 & 5 & 8 \\ 11 & 19 & 2 & 10 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 7 \\ -4 & 1 & 17 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2: (10 Punkte)
Es sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A, B, C, D \in M_n(K)$. Zeige oder widerlege:

a) $\det \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right) = \det(A)\det(D) - \det(B)\det(C)$.

b) $\det \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right) = \det(AD) - \det(BC)$.

Aufgabe 3: (10 Punkte)
Es sei K ein Körper, $m, n \in \mathbb{N}$ mit $n < m$ und $A \in M(m \times n, k)$, $B \in M(n \times m, K)$.

a) Zeige $\det(AB) = 0$

b) Gib für $n = 1 < m$ ein Beispiel für $A \in M(m \times 1, K)$ und $B \in M(1 \times m, K)$ mit $\det(BA) \neq 0$ an.

Abgabe je Zweier-/ Dreiergruppe eine Lösung bis Mittwoch, den 29.4..2020, 15 Uhr via Uni2work. Geben Sie auf den Lösungen die Namen an.

Ergänzungsaufgabe 1 – zum Üben, ohne Punkte
Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $x_1, x_2, ..., x_n \in K$. Zeige durch Induktion, daß

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

Ergänzungsaufgabe 2 – zum Üben, ohne Punkte
Es seien $A \in M(m \times n, K)$ und $B \in M(n \times m, K)$.
Zeige: $\det(E_n - BA) = \det(E_m - AB)$.
Hinweis: Benütze die beiden Blockmatrizen $F = \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ A & E_m \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} E_n & -B \\ -A & E_m \end{pmatrix} \in M_{n+m}(K)$.