Tutoriumsblatt 6 zu Lineare Algebra (Lehramt Gymnasium)

Aufgabe 1:
Das Vektorprodukt in $\mathbb{R}^3$ ist definiert wie folgt:

$$\begin{array}{rcl} \times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (\underline{x}, \underline{y}) = \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right) & \mapsto & \underline{x} \times \underline{y} := \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix} \end{array}$$

und es sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt in $\mathbb{R}^3$. Zeige: Für alle $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z} \in \mathbb{R}^3$ und alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt:

a) $\underline{x} \times \underline{y} = -\underline{y} \times \underline{x}$,

b) $\underline{x} \times (\lambda \underline{y} + \mu \underline{z}) = \lambda \underline{x} \times \underline{y} + \mu \underline{x} \times \underline{z}$

c) $\underline{x} \times \underline{y} = \underline{0}$ genau dann wenn $\underline{x}, \underline{y}$ linear abhängig sind.

d) Es sei $(\underline{x} \times \underline{y})_i$ die i-te Komponente von $\underline{x} \times \underline{y}$ dann gilt

$$(\underline{x} \times \underline{y})_i = \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} x_j y_k,$$

wobei ε_{ijk} definiert ist durch

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} \operatorname{sign}(\pi), & \text{falls } (i,j,k) = (\pi(1), \pi(2), \pi(3)) \text{ für } \pi \in \mathcal{S}_3 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

e) $\underline{x} \times (\underline{y} \times \underline{z}) = \langle \underline{x}, \underline{z} \rangle \underline{y} - \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle \underline{z}$.

Aufgabe 2:
Es sei

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Finde eine selbstadjungierte Matrix $B \in M_3(\mathbb{R})$ mit $B^3 = A$.

Aufgabe 3: Es sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$ und

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Finde eine Orthonormalbasis $(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3)$ von $\mathbb{R}^3$ so daß die quadratische Form

$$\begin{array}{rcl} q_B : \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ \underline{x} & \mapsto & \langle \underline{x}, B\underline{x} \rangle \end{array}$$

bei Entwicklung von $\underline{x} = a_1\underline{v}_1 + a_2\underline{v}_2 + a_3\underline{v}_3$ bzgl. dieser Basis nur quadratische Terme $\lambda_1 a_1^2 + \lambda_2 a_2^2 + \lambda_3 a_3^2$ enthält. Was sind hier $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$?