

Tutoriumsblatt 12 zu Lineare Algebra (Lehramt Gymnasium)

Aufgabe 1:

Sind X und Y \mathbb{K} -Banachräume über demselben Körper \mathbb{K} , $U \subseteq X$ offen und $f : U \rightarrow Y$ und $g : U \rightarrow Y$ differenzierbar in $a \in U$. Dann ist für jedes $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ die Abbildung

$$\begin{aligned} \lambda f + \mu g : U &\rightarrow Y && \text{in } a \text{ differenzierbar mit} \\ x &\mapsto \lambda f(x) + \mu g(x) \end{aligned}$$

$$(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a). \quad (1)$$

Aufgabe 2: Zeige: Es sei X ein Banachraum, $U \subseteq X$ offen, $a \in U$, $f : U \rightarrow \mathbb{K}$ und $g : U \rightarrow \mathbb{K}$ seien stetig und in a differenzierbar mit $g(a) \neq 0$. Dann ist

$$\begin{aligned} \frac{f}{g} : U &\rightarrow \mathbb{K} \\ x &\mapsto \frac{f(x)}{g(x)} \end{aligned}$$

auf der offenen Menge $V := g^{-1}(\mathbb{K} \setminus \{0\})$ wohldefiniert und in a differenzierbar mit

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{g(a)f'(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2} \quad (2)$$

Aufgabe 3:

Zeige, daß $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ in jedem Punkt $\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ differenzierbar ist und

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto x_1^3 x_2^2 - x_2^2$$

bestimme die Ableitung $(Df)(\underline{a})$.