Tutoriumsblatt 11 zu Lineare Algebra (Lehramt Gymnasium)

Aufgabe 1:
Zeige, daß $\begin{array}{rcl} f: \mathbb{C}\backslash\{0\} & \to & \mathbb{C}\backslash\{0\} \\ z & \mapsto & \frac{1}{z} \end{array}$ stetig ist.

Aufgabe 2: Zeige:

a) $\begin{array}{rcl} \sin: \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \sin(z) \end{array}$ hat dieselben Nullstellen wie $\begin{array}{rcl} \sin|_{\mathbb{R}}: \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ z & \mapsto & \sin(z) \end{array}$ und $\begin{array}{rcl} \cos: \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \cos(z) \end{array}$ hat dieselben Nullstellen wie $\begin{array}{rcl} \cos|_{\mathbb{R}}: \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ z & \mapsto & \cos(z) \end{array}$

b) $\{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} = \{x \in \mathbb{R} : \sin(x) = 0\}$ und $\{(2k+1)\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\} = \{x \in \mathbb{R} : \cos(x) = 0\}$

Aufgabe 3:
Es seien X_1, X_2, Y Vektorräume über demselben Körper $\mathbb{K}$. Eine Abbildung $\phi: X_1 \times X_2 \to Y$ heißt **bilinear**, wenn für jedes $a_2 \in X_2$ die Abbildung $\begin{array}{rcl} X_1 & \to & Y \\ x_1 & \mapsto & \phi(x_1, a_2) \end{array}$ und für jedes $a_1 \in X_1$ die Abbildung $\begin{array}{rcl} X_2 & \to & Y \\ x_2 & \mapsto & \phi(a_1, x_2) \end{array}$ $\mathbb{K}$-linear ist. Zeige: Sind $(X_1, \|\cdot\|_1)$, $(X_2, \|\cdot\|_2), (Y, \|\cdot\|)$ Banachräume über demselben Körper $\mathbb{K}$, dann sind für eine bilineare Abbildung $\phi: X_1 \times X_2 \to Y$ äquivalent:

a) ϕ ist stetig (bezüglich der Produkttopologie auf $X_1 \times X_2$ aus der Normtopologie $\mathcal{O}_{\|\cdot\|_1}$ auf X_1 und $\mathcal{O}_{\|\cdot\|_2}$ auf X_2 und der Normtopologie $\mathcal{O}_{\|\cdot\|}$ auf Y).

b) ϕ ist stetig in $\mathbf{0}$.

c) Es gibt $C \in]0, \infty[$ mit

$$\|\phi(x_1, x_2)\| \leq C\|x_1\|_1\|x_2\|_2 \tag{1}$$

für alle $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$.