Tutoriumsblatt 10 zu Lineare Algebra (Lehramt Gymnasium)

Aufgabe 1:
Es sei $(X, \mathcal{O})$ ein hausdorffscher topologischer Raum und $(K_i)_{i\in I}$ eine Familie von kompakten Teilmengen $K_i \subseteq X$. Zeige oder widerlege:

a) $\bigcap\limits_{i\in I} K_i$ ist kompakt.

b) $\bigcup\limits_{i\in I} K_i$ ist kompakt.

c) Ist $J \subseteq I$ endlich, dann ist $\bigcup\limits_{i\in J} K_i$ kompakt.

Aufgabe 2:
Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Zeige:

a) Für jedes $v \in V$ ist

$$\begin{array}{rcl} f_v : V & \to & \mathbb{K} \\ w & \mapsto & \langle v, w \rangle \end{array}$$

eine stetige lineare Abbildung.

b) $|||f_v||| = \|v\|$ ist die Operatornorm von f_v.

Aufgabe 3:
Versehe $C([0,1], \mathbb{R})$ mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ und zeige:

a) Für $f \in C([0,1], \mathbb{R})$, $x \in [0,1]$ wird durch

$$(T[f])(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n(n+1)} f(x^n)$$

ein stetiger linearer Operator

$$\begin{array}{rcl} T : C([0,1], \mathbb{R}) & \to & C([0,1], \mathbb{R}) \\ f & \mapsto & T[f] \end{array}$$

definiert.

b) $|||T||| = \frac{1}{4}$ und $\mathrm{id} - T$ ist invertierbar.