Übungsblatt 9 zu Lineare Algebra (Lehramt Gymnasium)

Aufgabe 24: (10 Punkte):
Es sei $(X, \mathcal{O})$ ein zusammenhängender topologischer Raum, $\emptyset \neq A \subseteq X$ mit $\partial(A) = \emptyset$. Zeige: $A = X$.

Aufgabe 25: (10 Punkte):
Bestimme von $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin(x^2 - 1) + \cos(x) + x^3 \end{array}$ eine Nullstelle in $[-1, 0]$ bis auf eine Abweichung von höchstens $0,1$.

Aufgabe 26: (10 Punkte): Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein kompakter topologischer Raum, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ ein hausdorffscher topologischer Raum und $f : X \to Y$ sei stetig und bijektiv. Zeige, daß dann f ein Homöomorphismus ist.

Abgabe je Zweier-/ Dreiergruppe eine Lösung bis Mittwoch, den 24.6.2020, 15 Uhr via Uni2work. Geben Sie auf den Lösungen die Namen an.

Ergänzungsaufgabe 3 (ohne Punkte/ Abgabe)
Es sei $\emptyset \neq I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Zeige:

$$V := \{(x, y) \in I \times I : x < y\} \tag{1}$$

ist eine zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{R}^2$.
Anleitung: Fixiere $z = (z_1, z_2) \in V$ und betrachte zu $w = (w_1, w_2) \in V$ die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \alpha_w : [0, 1] & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & tz + (1 - t)w \end{array}$$

Ergänzungsaufgabe 4 (ohne Punkte/ Abgabe)
Es seien X und Y zwei homöomorphe topologische Raume, dies bedeutet, daß ein Homöomorphismus $f : X \to Y$ existiert. Zeige:

a) Für $x \in X$ sind auch $X \backslash \{x\}$ und $Y \backslash \{f(x)\}$ homöomorph.

b) X ist genau dann zusammenhängend, wenn Y zusammenhängend ist.

c) $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^2$ sind nicht homöomorph.