Übungsblatt 8 zu Lineare Algebra (Lehramt Gymnasium)

Aufgabe 21: (15 Punkte):

$\widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ wird wie in Kapitel 5.6 mit $\begin{array}{rcl} d: \widehat{\mathbb{R}} \times \widehat{\mathbb{R}} & \to & [0, \infty[\\ (x,y) & \mapsto & |F(x) - F(y)| \end{array}$ und

$$\begin{array}{rcl} F: \widehat{\mathbb{R}} & \to & [-1, 1] \\ x & \mapsto & F(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x = \infty \\ \dfrac{x}{1+|x|} & \text{für } x \in \mathbb{R} \\ -1 & \text{für } x = -\infty \end{cases} \end{array}$$

zu einem metrischen und damit auch zu einem topologischen Raum $(\widehat{\mathbb{R}}, \mathcal{O}_d)$.

a) Zeige: Die Standardtopologie $\mathcal{O}_{\mathbb{R}}$ auf $\mathbb{R}$ und die von $\mathcal{O}_d$ auf $\mathbb{R}$ definierte Relativtopologie $\mathcal{O}$ sind gleich. Hinweis: Lemma 5.6.5 könnte helfen!

b) Zeige: ∞ ist ein Berührpunkt von $\mathbb{R}$ in $\widehat{\mathbb{R}}$.

c) Entscheide, für $c \in \widehat{\mathbb{R}}$ und $k \in \mathbb{N}$ welche der Funktionen $\begin{array}{rcl} f_c : \mathbb{R} & \to & \widehat{\mathbb{R}} \\ x & \mapsto & c \end{array}$ und $\begin{array}{rcl} g_k : \mathbb{R} & \to & \widehat{\mathbb{R}} \\ x & \mapsto & x^k \end{array}$ und $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ einen Grenzwert für $x \to \infty$ besitzt und bestimme diesen gegebenenfalls.

Aufgabe 22: (10 Punkte):

Zeige, daß

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{x\sin(y)}{10} - \dfrac{y^4}{10} - x & = & -\dfrac{1}{10} \\ \dfrac{y\sin(x)}{10} + \dfrac{x\cos(y)}{10} + y & = & 0 \end{array}$$

genau eine Lösung ξ in $M := \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \times [-1, 1]$ hat. Bestimme die ersten drei Iterationsschritte zur iterativen Bestimmung dieser Lösung, ausgehend vom Startwert $x_0 = (0, 0)$. Wie viele Iterationsschritte braucht man um diese Lösung mit einem Fehler von höchstens $0,001$ zu bestimmen.

Aufgabe 23: (15 Punkte):

a) Es sei X ein $\mathbb{C}-$Banachraum und $(c_{(j_1,j_2)})_{(j_1,j_2)\in\mathbb{N}_0^2}$ eine Familie in X und es seien $(b_1, b_2) \in \mathbb{C}^2$ mit $b_1, b_2 \neq 0$,

$$C := \sup\left\{\|c_{(j_1,j_2)}\||b_1^{j_1}||b_2^{j_2}| : (j_1, j_2) \in \mathbb{N}_0^2\right\} < \infty$$

und $r_1 \in]0, |b_1|[$ und $r_2 \in]0, |b_2|[$. Zeige, daß für $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ mit $|z_1| \leq r_1$ und $|z_2| \leq r_2$ der Grenzwert $\sum\limits_{j_1,j_2=0}^{\infty} c_{(j_1,j_2)} z_1^{j_1} z_2^{j_2}$ in X existiert und

$$\begin{array}{rcl} f : \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1| \leq r_1, |z_2| \leq r_2\} & \to & X \\ (z_1, z_2) & \mapsto & \sum\limits_{j_1,j_2=0}^{\infty} c_{(j_1,j_2)} z_1^{j_1} z_2^{j_2} \end{array}$$

eine stetige Funktion definiert.

b) Zeige, daß

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{C} \times \{z_2 \in \mathbb{C} : |z_2| < 1\} & \to & \mathbb{C} \\ (z_1, z_2) & \mapsto & \sum\limits_{j_1,j_2=1}^{\infty} \dfrac{1}{j_1!} z_1^{j_1} z_2^{j_2} \end{array}$$

stetig ist und bestimme $\lim\limits_{(z_1,z_2)\to(2,\frac{i}{2})} f(z_1, z_2)$.

Abgabe je Zweier-/ Dreiergruppe eine Lösung bis Mittwoch, den 17.6.2020, 15 Uhr via Uni2work. Geben Sie auf den Lösungen die Namen an.