Übungsblatt 7 zu Lineare Algebra (Lehramt Gymnasium)

Aufgabe 18: (10 Punkte): Es sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum $A, B \subseteq X$. Es bezeichne $\overline{A}$ den Abschluß von A, $\mathring{B}$ den offenen Kern von B und $\partial(A) = \overline{A} \backslash \mathring{A}$ den Rand von A.

a) Zeige: Ist $A \subseteq B$, so gilt $\overline{A} \subseteq \overline{B}$ und $\mathring{A} \subseteq \mathring{B}$.

b) Zeige: $\partial(\overline{A}) \subseteq \partial(A)$ und $\partial(\mathring{A}) \subseteq \partial(A)$.

c) Gib ein Beispiel von $A \subseteq \mathbb{R}$ an, so daß bezüglich der Standardtopologie $\mathcal{O}_{\mathbb{R}}$ auf $\mathbb{R}$ die drei Mengen $\partial(\overline{A})$, $\partial(A)$ und $\partial(\mathring{A})$ alle verschieden sind.

Aufgabe 19: (10 Punkte):
Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Zu $x \in X$ und $r > 0$ sei $\overline{K}(x, r) := \{y \in X : d(x, y) \leq r\}$ und $\overline{K(x, r)}$ der Abschluß von $K(x, r) := \{y \in X : d(x, y) < r\}$ bezüglich der durch die Metrik induzierten Topologie, $\mathcal{O}_d$. Zeige:

a) $\overline{K(x, r)} \subseteq \overline{K}(x, r)$.

b) Falls $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum ist, so gilt

$$\overline{K(x, r)} = \overline{K}(x, r).$$

c) Gib ein Beispiel einer Metrik $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0, \infty[$ und von $x \in \mathbb{R}$, $r > 0$ mit $\overline{K(x, r)} \neq \overline{K}(x, r)$ an.

Aufgabe 20: (15 Punkte):

a) Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein topologischer Raum, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ ein hausdorffscher topologischer Raum und $f : X \to Y$ und $g : X \to Y$ stetige Funktionen. Ferner sei $A \subseteq X$ und

$$\begin{aligned} h : X &\to Y \\ x &\mapsto \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in A \\ g(x) & \text{für } x \in X \backslash A \end{cases} \end{aligned}.$$

In welchen Punkten $x \in X$ ist h stetig?

b) $\mathcal{O}_{\mathbb{R}}$ sei die Standardtopologie auf $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^2$ sei mit der Produkttopologie aus $\mathcal{O}_{\mathbb{R}}$ mit $\mathcal{O}_{\mathbb{R}}$ versehen. In welchen Punkten $x \in \mathbb{R}$ ist die Funktion

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^2 \\ x &\mapsto \begin{cases} (x^2, 1-x) & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ (1-x, 3x^3) & \text{für } x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \end{cases} \end{aligned}$$

stetig?

Abgabe je Zweier-/ Dreiergruppe eine Lösung bis Mittwoch, den 10.6.2020, 15 Uhr via Uni2work. Geben Sie auf den Lösungen die Namen an.