Übungsblatt 4 zu Lineare Algebra (Lehramt Gymnasium)

Aufgabe 10: (15 Punkte)

a) Es sei $\begin{array}{rcl} \|\cdot\| : \mathbb{R}^d & \to & [0,\infty[\\ \underline{x} & \mapsto & \|\underline{x}\| \end{array}$ eine Norm auf $\mathbb{R}^d$. Zeige, daß

$$\begin{array}{rcl} |||\cdot||| : M_d(\mathbb{R}) & \to & [0,\infty[\\ A & \mapsto & |||A||| := \sup\{\|A\underline{x}\| : \underline{x} \in \mathbb{R}^d, \|\underline{x}\| \leq 1\} \end{array}$$

eine Norm auf $M_d(\mathbb{R})$ definiert (von $\|\cdot\|$ induzierte Matrixnorm) und

$$\begin{array}{rcl} \|A\underline{x}\| & \leq & |||A|||\,\|\underline{x}\| \\ |||AB||| & \leq & |||A|||\,|||B||| \end{array}$$

für alle $\underline{x} \in \mathbb{R}^d$ und $A, B \in M_d(\mathbb{R})$ gilt.

b) Zeige, daß die von $\begin{array}{rcl} \|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^d & \to & [0,\infty[\\ (x_1, ..., x_d) & \mapsto & \sup\{|x_l| : l = 1, ..., d\} \end{array}$ induzierte Matrixnorm $|||\cdot|||_\infty$ für $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1d} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{d1} & \cdots & a_{dd} \end{pmatrix} \in M_d(\mathbb{R})$ gegeben ist als

$$|||A|||_\infty = \max\left\{\sum_{j=1}^{d} |a_{ij}| : i = 1, ..., d\right\}.$$

Aufgabe 11: (20 Punkte)
Berechne für die Matrix

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

das charakteristische Polynom, alle verallgemeinerten Eigenräume und Haupträume. Entscheide, ob es eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^3$ gibt, so daß die $\mathbb{R}-$lineare Abbildung $\begin{array}{rcl} F_A : \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \underline{x} & \mapsto & A\underline{x} \end{array}$ eine darstellende Matrix $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F_A)$ in Jordanform besitzt und gib gegebenfalls diese Jordanform zusammen mit den Transformationsmatrizen an. Berechne für $t \in \mathbb{R}$ die Matrix e^{tA}.

Abgabe je Zweier-/ Dreiergruppe eine Lösung bis Mittwoch, den 20.5.2020, 15 Uhr via Uni2work. Geben Sie auf den Lösungen die Namen an.