

Übungsblatt 2 zu Lineare Algebra (Lehramt Gymnasium)

Aufgabe 4: (10 Punkte)

Zeige, daß die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -5 \\ 3 & -1 & 3 \\ 4 & -4 & 7 \end{pmatrix}$$

diagonalisierbar ist und gib eine Basis von \mathbb{R}^3 aus Eigenvektoren von A an.

Aufgabe 5: (10 Punkte)

Berechne für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

alle Eigenwerte und alle Eigenräume. Entscheide, ob A diagonalisierbar ist oder zumindest eine Schursche Normalform hat. Gib im diagonalisierbaren Fall eine Basis aus Eigenvektoren von A oder wenn es eine Schursche Normalform gibt, eine Basis von \mathbb{R}^3 an, die auf Schurform transformiert.

Aufgabe 6: (20 Punkte)

Es sei $A \in M_n(\mathbb{R})$ eine $n \times n$ -Matrix mit reellen Einträgen, deren charakteristisches Polynom $p_A(X) = \det(A - XE_n)$ – aufgefaßt als Polynom mit komplexen Koeffizienten eine m -fache Nullstelle bei $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ hat.

a) Zeige: Die komplex konjugierte Zahl $\bar{\gamma}$ ist eine m -fache Nullstelle von p_A .

b) Zeige: Ist $\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ ein Eigenvektor der \mathbb{C} -linearen Abbildung $F_A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$
 $\underline{x} \mapsto A\underline{x}$

zum Eigenwert γ , dann ist der Vektor $\underline{w} := \begin{pmatrix} \bar{v}_1 \\ \vdots \\ \bar{v}_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$, der aus \underline{v} durch komplexes Konjugieren jeder Komponente hervorgeht, ein Eigenwert von F_A zum Eigenwert $\bar{\gamma}$.

c) Es sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$. Entscheide, ob es für die \mathbb{C} -lineare Abbildung $F_A : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$
 $\underline{x} \mapsto A\underline{x}$
 eine Basis des \mathbb{C}^3 aus Eigenvektoren von F_A gibt und gib diese gegebenenfalls an. Entscheide, ob es für die \mathbb{R} -lineare Abbildung $f_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Basis des \mathbb{R}^3 aus Eigenvektoren
 $\underline{x} \mapsto A\underline{x}$
 von f_A gibt und gib diese gegebenenfalls an.

Abgabe je Zweier-/ Dreiergruppe eine Lösung bis Mittwoch, den 6.5.2020, 15 Uhr via Uni2work. Geben Sie auf den Lösungen die Namen an.