Ferienblatt zu Lineare Algebra (Lehramt Gymnasium)

Aufgabe 36: (10 Punkte):
Es sei $U := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_1^3 - x_2x_3 > 0 \right\}$. Zeige, daß $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen ist und

$$\begin{array}{rcl} f : U & \to & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} \dfrac{x_1x_2}{x_1^3 - x_2x_3} \\ \sqrt{x_1^3 - x_2x_3} \end{pmatrix} \end{array}$$

in jedem Punkt $a \in U$ differenzierbar ist und berechne die Ableitung und die Jacobimatrix in jedem $a \in U$.

Aufgabe 37: (10 Punkte):
Es sei $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{für } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}$. Zeige

a) Die partiellen Ableitungen $(D_1 f)(0,0)$ und $(D_2 f)(0,0)$ existieren.

b) Die Richtungsableitungen $(D_v f)(0,0)$ existieren für $v \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(1,0),(0,1)\}$ nicht.

c) f ist in $(0,0)$ nicht differenzierbar.

Aufgabe 38: (15 Punkte):
Es sei X ein $\mathbb{R}-$Vektorraum. Eine Teilmenge $K \subseteq X$ heißt **konvex**, wenn für alle $x, y \in K$ auch die Verbindungsstrecke

$$[\![x,y]\!] := \{x + t(y-x) : t \in [0,1]\} \subseteq K$$

in K enthalten ist. Ist $K \subseteq X$ konvex, dann heißt eine Funktion $f : K \to \mathbb{R}$ **konvex**, wenn

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y)$$

für alle $x, y \in K$ und $t \in [0,1]$ erfüllt ist. $f : K \to \mathbb{R}$ heißt **konkav**, wenn $-f$ konvex ist. Zeige:

a) $K \subseteq X$ ist genau dann konvex, wenn für alle $a, b \in K$ mit $a \neq b$ ein Intervall $I_{a,b} \subseteq \mathbb{R}$ existiert, so daß für $\begin{array}{rcl} \varphi_{a,b} : \mathbb{R} & \to & X \\ t & \mapsto & a + t(b-a) \end{array}$ gilt:

$$\varphi_{a,b}(\mathbb{R}) \cap K = \varphi_{a,b}(I_{a,b}).$$

b) $f : K \to \mathbb{R}$ ist genau dann konvex, wenn für alle $a, b \in K$ mit $a \neq b$ die Funktion $f \circ (\varphi_{a,b}|_{I_{a,b}}) : I_{a,b} \to \mathbb{R}$ konvex ist.

c) Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar. f ist genau dann konvex, wenn f' monoton wachsend ist.

Aufgabe 39: (15 Punkte)
Sind $y \in \mathbb{R}$ und $a > 0$, so ist $a^y := e^{y \ln(a)}$ Zeige:

a) $\begin{array}{rcl} \exp : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^x \end{array}$ ist konvex und $\begin{array}{rcl} \ln :]0,\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(x) \end{array}$ ist konkav.

b) Ist $p \in]1,\infty[$ und $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, so gilt für alle $x,y\in[0,\infty[$:

$$xy \le \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q$$

c) Für $p\in]1,\infty[$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ und $x=(x_1,...,x_d)\in\mathbb{K}^d$ sei

$$\|x\|_p := (|x_1|^p + ... + |x_d|^p)^{\frac{1}{p}}$$

dann ist $\|\cdot\|_p : \mathbb{K}^d \to [0,\infty[$ eine Norm und für $x=(x_1,...,x_d), y=(y_1,...,y_d)\in\mathbb{K}^d$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{d} |x_k y_k| \le \|x\|_p \|y\|_q$$

Aufgabe 40: (10 Punkte)
Zeige: Für alle $x \in]-1,1[$ gilt:

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \\ \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) &= 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \end{aligned}$$

Aufgabe 41: (10 Punkte)
Es sei $\begin{aligned} f:]-1,1[&\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \begin{cases} (0,0) & \text{für } t\in]-1,0] \\ (t^2\sin(\frac{1}{t}), t^2\cos(\frac{1}{t})) & \text{für } t\in]0,1[\end{cases} \end{aligned}$. Zeige: f ist differenzierbar, aber f' ist nicht stetig und $f'(]-1,1[)$ ist nicht zzusammenhängend.

Aufgabe 42: (10 Punkte)
Es sei $\begin{aligned} f: \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} & \text{für } y>0 \\ x & \text{für } y=0 \\ -\sqrt{x^2+y^2} & \text{für } y<0 \end{cases} \end{aligned}$. Zeige:

a) Für jedes $v=(v_1,v_2)\in\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ existiert die Richtungsableitung $(D_v f)(0,0)$ von f in $(0,0)$ in Richtung v.

b) f ist in $(0,0)$ nicht differenzierbar.

Abgabe je Zweier-/ Dreiergruppe eine Lösung bis Montag, den 19.10.2020, 15 Uhr via Uni2work oder per E-Mail an hdjaskolla@gmx.de. Geben Sie auf den Lösungen die Namen an.