Übungsblatt 12 zu Lineare Algebra (Lehramt Gymnasium)

Aufgabe 33:

Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ und $(Df)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} & \mapsto & 3y_1 + y_2 \end{array}$

und $g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & f\begin{pmatrix} f(t,-t) \\ f(t^2, t^3) \end{pmatrix} \end{array}$. Zeige, daß g differenzierbar ist und berechne $(Dg)(0)$.

Aufgabe 34:

Es seien $X_1, ..., X_n, Y$ Banachräume über demselben Körper $\mathbb{K}$ und $\phi : X_1 \times ... \times X_n \to Y$ sei stetig und multilinear. Zeige: ϕ ist in jedem Punkt $a = (a_1, ..., a_n) \in X_1 \times ... \times X_n$ differenzierbar und

$$\phi'(a_1, ..., a_n)[x_1, ..., x_n] = \sum_{j=1}^{n} \phi(a_1, ..., a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, ..., a_n). \tag{1}$$

Aufgabe 35:

Zeige:

a) $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & \mapsto & 2x_1^3 x_2 + x_2^4 \end{array}$ ist in jedem $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ differenzierbar.

b) $g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & \mapsto & (2x_1^3 x_2 + x_2^4)^4 \end{array}$ ist in jedem $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ differenzierbar.

c) Es sei $V := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$ und $F : \begin{array}{rcl} V & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x_1 x_2 + 2x_1^3 x_2 + x_2^4 \\ \dfrac{1}{2x_1^3 x_2 + x_2^4} \\ \sqrt[3]{2x_1^3 x_2 + x_2^4} \end{pmatrix} \end{array}$,

dann ist F in jedem $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in V$ differenzierbar.

Berechne in allen drei Beispielen die Ableitungen.

Keine Abgabe