Übungsblatt 11 zu Lineare Algebra (Lehramt Gymnasium)

Aufgabe 30: (10 Punkte):
Es seien $L, M \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle, $f : L \to M$ stetig, bijektiv und streng monoton. Zeige: Die Umkehrfunktion $f^{-1} : M \to L$ ist stetig.

Aufgabe 31: (15 Punkte): Zeige:

a) $\begin{array}{rcl} \tan : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \end{array}$ ist eine stetige, streng monoton steigende Funktion.

b) In $\widehat{\mathbb{R}}$ gilt:

$$\lim_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[}} \tan(x) = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{\substack{x \to -\frac{\pi}{2} \\ x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[}} \tan(x) = -\infty$$

c) $\begin{array}{rcl} \tan : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \end{array}$ ist ein Homöomorphismus.

d) Für die Umkehrfunktion $\begin{array}{rcl} \arctan : \mathbb{R} & \to & \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ y & \mapsto & \arctan(y) \end{array}$ von $\begin{array}{rcl} \tan : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \tan(x) \end{array}$ gilt

$$\lim_{x \to \infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad \lim_{x \to -\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}.$$

Aufgabe 32: (15 Punkte):
Es sei $n \in \mathbb{N}$, $E_n \in M_n(\mathbb{C})$ die Einheitsmatrix und $||\cdot|| : \mathbb{C}^n \to [0, \infty[$ eine Norm auf $\mathbb{C}^n$ sowie

$$\begin{array}{rcl} |||\cdot||| : M_n(\mathbb{C}) & \to & [0, \infty[\\ A & \mapsto & |||A||| := \sup\{\|A\underline{v}\| : \underline{v} \in \mathbb{C}^n, \|\underline{v}\| \leq 1\} \end{array}$$

die zugehörige Operatornorm. Zu $m \in \mathbb{N}$ und $A \in M_n(\mathbb{C})$ sei weiterhin die Partialsummenfolge

$$S_m(A) := \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} A^k \in M_n(\mathbb{C})$$

definiert und $S_{ij,m}$ sei der Eintrag in der $i-$ten Zeile und $j-$ten Spalte von $S_m(A) = (S_{ij,m})_{1 \leq i,j \leq n}$.
Zeige:

a) Die Folge $(S_m(A))_{m \in \mathbb{N}}$ konvergiert bezüglich $|||\cdot|||$ in $M_n(\mathbb{C})$.

b) Die Folge $(S_m(A))_{m \in \mathbb{N}}$ konvergiert bezüglich jeder Norm auf $M_n(\mathbb{C})$, insbesondere konvergiert für alle $i, j \in \{1, ..., n\}$ die Folge $(S_{ij,m})_{m \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$.

c) Es gilt $|||\mathrm{e}^A||| \leq \mathrm{e}^{|||A|||}$.

d) Es gilt $\displaystyle\lim_{\substack{t \to 0 \\ t \in \mathbb{C} \setminus \{0\}}} \frac{\mathrm{e}^{tA} - E_n}{t} = A.$

Abgabe je Zweier-/ Dreiergruppe eine Lösung bis Mittwoch, den 8.7.2020, 15 Uhr via Uni2work. Geben Sie auf den Lösungen die Namen an.

Ergänzungsaufgabe 6 (ohne Punkte/ Abgabe)
Es seien $X_1, ..., X_n, Y$ Vektorräume über demselben Körper K. Eine Abbildung $\phi : X_1 \times ... \times X_n \to Y$ heißt **multilinear**, wenn für jedes $k \in \{1, ..., n\}$ und für jede Wahl von $a_j \in X_j$, $j \neq k$ die Abbildung $\begin{array}{rcl} X_k & \to & Y \\ x_k & \mapsto & \phi(a_1, ..., a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, ..., a_n) \end{array}$ K-linear ist.
Zeige: Sind $(X_1, \|\cdot\|_1), ..., (X_n, \|\cdot\|_n), (Y, \|\cdot\|)$ Banachräume über demselben Körper $\mathbb{K}$, dann sind für eine multilineare Abbildung $\phi : X_1 \times ... \times X_n \to Y$ äquivalent:

a) ϕ ist stetig (bezüglich der Produkttopologie auf $X_1 \times ... \times X_n$ aus den Normtopologien $\mathcal{O}_{\|\cdot\|_1}$ auf X_1,... $\mathcal{O}_{\|\cdot\|_n}$ auf X_n und der Normtopologie $\mathcal{O}_{\|\cdot\|}$ auf Y).

b) ϕ ist stetig in $\mathbf{0}$.

c) Es gibt $C \in]0, \infty[$ mit

$$\|\phi(x_1, ..., x_m)\| \leq C\|x_1\|_1 \cdots \|x_n\|_n \tag{1}$$

für alle $(x_1, ..., x_n) \in X_1 \times ... \times X_n$.