Übungen zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 33: (H10T1A3)
Konstruieren Sie eine gebrochen-rationale Abbildung (Möbiustransformation) f, die die Kreisscheibe

$$K := \{z \in \mathbb{C} : |z+1| < 2\}$$

auf die obere Halbebene

$$H := \{w \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\,(w) > 0\}$$

abbildet. Ist eine solche Abbildung eindeutig bestimmt?

Aufgabe 34: (H18T3A2)

a) Sei $f : \mathbb{C}\backslash\{-1\} \to \mathbb{C}$ definiert durch $f(z) := \frac{3z+1}{u+1}$. Bestimmen Sie das Bild von $B_1(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ unter f.

b) Es seien $B_2(1) = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| < 2\}$ und $G := \{x+iy \in \mathbb{C} : x, y \in \mathbb{R}, x < 0\}$. Bestimmen Sie eine biholomorphe Abbildung $g : B_2(1) \to G$.

c) Zeigen oder widerlegen Sie, daß es eine biholomorphe Abbildung

$$h : \mathbb{C}\backslash\{x+iy : y = 0, x \in \mathbb{R}\backslash]-1,1[\} \to B_1(0)$$

gibt.

Aufgabe 35: (F18T2A1)

a) Wir betrachten die beiden Gebiete

$$\Omega_1 := \{z = x+iy \in \mathbb{C} : x > 0, y > 0\}$$

und

$$\Omega_2 := \{z = x+iy \in \mathbb{C} : x \in \mathbb{R}, 0 < y < 1\}$$

(1) Zeigen Sie, daß eine biholomorphe Abbildung $f : \Omega_2 \to \Omega_1$ existiert.

(2) Geben Sie eine solche Abbildung explizit an.

b) Bestimmen Sie die Anzahl der Nullstellen (mit Vielfachheiten) des Polynpms

$$z^{87} + 36z^{57} + 71z^4 + z^3 - z + 1$$

in dem Kreisring $K_{1,2}(0) = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$.

Aufgabe 36: (F07T3A3)
Sei $G = \mathbb{C}\backslash\{iy : y \in [0,\infty[$ die geschlitzte Ebene und $\mathbb{E} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ der offene Einheitskreis.

a) Begründen Sie, daß es eine konforme Abbildung $f : G \to \mathbb{E}$ gibt.

b) Geben Sie explizit eine solche Abbildung an.