Übungen zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 29: (F09T2A4) Berechnen Sie die folgenden Integrale

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{x^2+4}dx$

b) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2+4}dx$

Aufgabe 30: (H01T3A5) Es seien

$$D_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}, \quad D_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| < 1\}, \quad D_3 = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}.$$

Für welche $j \in \{1,2,3\}$ gibt es eine auf D_j holomorphe Funktion $f_j : D_j \to \mathbb{C}$ mit $(f_j(z))^3 = z^3 - 1$ für alle $z \in D_j$?

Aufgabe 31: (H03T3A2)

a) Zeigen Sie, daß alle Nullstellen des Polynoms $P(z) = 3z^3 + z + i$ in der offenen komplexen Einheitskreisscheibe liegen.

b) Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int_{i-\infty}^{i+\infty} \frac{e^{iz}}{3z^3+z+i}dz$

c) Sei $D := \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$. Gibt es eine holomorphe Abbildung $h : D \to \mathbb{C}$ derart, daß $P(z) = e^{h(z)}$ für alle $z \in D$ gilt?

Aufgabe 32: (F19T1A1)

a) Es sei

$$P(z) := 2019z^{2019} + \sum_{k=0}^{2018} a_k z^k,$$

wobei $a_k \in \mathbb{C}$, $|a_k| < 1$ für alle $k = 0, ..., 2018$ gelte. Bestimmen Sie die Anzahl der Nullstellen von P in der offenen Einheitskreisscheibe $\mathcal{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ mit Berücksichtigung der Vielfachheiten gezählt.

b) Formulieren Sie für den Spezialfall holomorpher Funktionen das Argumentprinzip (auch als Satz vom nullstellenzählenden Integral bekannt).

c) Es sei P wie in (a) definiert. Zeigen Sie

$$\exp\left(\frac{1}{673}\int_{\partial\mathcal{D}} \frac{P'(z)}{P(z)}dz\right) = 1$$

Hierbei bezeichnet $\partial\mathcal{D}$ die einmal im mathematisch positiven Sinne durchlaufene Einheitskreislinie.