Übungen zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 25: (H17T3A1)
Es sei $\Omega := \mathbb{C}\backslash[-1,1] = \mathbb{C}\backslash\{z \in \mathbb{C} : -1 \leq \mathrm{Re}\,(z) \leq 1, \mathrm{Im}\,(z) = 0\}$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

a) Auf Ω existiert keine holomorphe Logarithmusfunktion der Funktion $z \mapsto f(z) = \frac{1}{z^2-1}$, dh. es gibt keine holomorphe Funktion $g : \Omega \to \mathbb{C}$ mit $e^{g(z)} = f(z)$ für alle $z \in \Omega$.

b) Auf Ω existiert eine holomorphe Logarithmusfunktion der Funktion $z \mapsto h(z) = i\frac{z+1}{z-1}$, dh. es gibt eine holomorphe Funktion $w : \Omega \to \mathbb{C}$ mit $e^{w(z)} = h(z)$ für alle $z \in \Omega$.

Aufgabe 26: (F07T1A5) Es sei $f := \dfrac{p}{q}$ eine rationale Funktion und es sei der Grad des Nennerpolynoms q um 2 größer als der Grad des Zählerpolynoms p. Zeigen Sie, daß die Summe der Residuen von f verschwindet, dh.

$$\sum_{a\in\mathbb{C}} \mathrm{Res}(f, a) = 0.$$

Aufgabe 27: (F03T1A3)

a) Formulieren Sie den Residuensatz für den Spezialfall einer Funktion, die nur im Nullpunkt eine Singularität hat.

b) Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int_{|z|=r} [\sin(\frac{1}{z})]^n$ für beliebiges $r > 0$ und $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 28: (H18T3A4) Wir betrachten den Weg $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$\gamma(t) = \begin{cases} e^{\frac{i\pi}{2}} + e^{2i(t-\pi)} & \text{für } t \in [0, \pi] \\ -1 + i + 2e^{4it} & \text{für } t \in]\pi, 2\pi] \end{cases}$$

a) Skizzieren Sie den Weg γ (entweder in Worten oder mit Hilfe einer Skizze).

b) Berechnen Sie

$$\int_\gamma \frac{(z-(2-i))e^{iz}}{(z^2+1)(z^2-3+4i)}dz.$$

Hinweis: Berechnen Sie $(2-i)^2$.